LINÉAIRE, NON LINÉAIRE (A, G, H, I, J)
(16 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Dans de nombreux contextes, le **statisticien** met en oeuvre des notions linéaires, ie des notions mathématiques simples liées aux concepts :

(a) d'**espace vectoriel** et ses dérivés : **espace affine**, **espace normé**, etc ;

(b) d'**application linéaire** (ou **opérateur linéaire**) et ses dérivé(e)s : **application affine**, etc.

Ainsi :

(a) l'**espérance mathématique** est une notion liée à celle d'**intégrale** : c'est aussi un concept linéaire ;

(b) un **projecteur**, qui permet de définir de nombreux types d'estimateurs, est souvent un opérateur linéaire.

(ii) Les **notions linéaires** sont susceptibles de d'interprétations géométriques simples : il en est ainsi eg dans la plupart des méthodes de l'**analyse des données** (cf **analyse générale des données**), d'un **modèle de régression**, d'un **modèle d'analyse de la variance**, d'un **modèle d'analyse de la covariance**, ou encore d'un **modèle d'interdépendance**.

De plus, un « objet » linéaire (sous-variété linéaire ou affine, **application linéaire** ou **application affine**) résulte souvent d'une « approximation » simple (ou « au premier ordre ») d'un objet plus complexe, dit non linéaire : eg **variété différentielle** (cf **approximation**, **approximation linéaire**, **méthode d'approximation**).

(iii) Lorsqu'on traite un ensemble de **variables**, ou un ensemble d'**observations** de celles-ci sur des **unité statistiques**, un premier **degré de complexité** (cf **complexité**) peut être atteint en définissant sur des espaces ad hoc (le plus souvent vectoriels) des opérations multi-linéaires (ou des tenseurs) (cf **application multilinéaire**), dont les **formes multilinéaires** (eg formes bilinéaires) constituent une classe importante. Ces dernières permettent de définir les notions de **tableau statistique multidimensionnel** (eg tableau à deux dimensions), d'**opérateur de covariance**, de **variance** ou de **forme quadratique**.

(iv) Une **procédure statistique** conduit généralement à des opérations plus complexes, dites **opérations non linéaires**. La (non) linéarité peut s'entendre comme :

(a) **(non) linéarité pr aux** **paramètres** du modèle considéré ;

(b) **(non) linéarité pr aux** **variables** prises en considération ;

(c) **(non) linéarité pr aux** **observations** disponibles.

Des notions non linéaires interviennent « spontanément » dans trois **contextes statistiques** :

(a) **fonction de vraisemblance** ou **rapport des vraisemblances**. C'est le cas du contexte impliquant un **modèle paramétrique**, pour lequel $\theta \in \mathbf{R}^Q$. Ainsi, la **méthode du maximum de vraisemblance** conduit à la mise en oeuvre de techniques d'**optimisation** classiques (**programmation mathématique**), notamment lorsque $\theta \in B$ (partie stricte de $\mathbf{R}^Q$). La **vraisemblance** $f(. , \theta) = dP_\theta^X / d\mu$ définit une **variété non linéaire** de $\mathbf{R}^{Q+1}$ dont l'équation « paramétrée » $\theta \mapsto f(X, \theta)$ est **stochastique** : soit à travers X, selon l'**école classique**, soit à travers (X, θ) selon l'**école bayésienne** ;

(b) **modèle non linéaire**. C'est le cas des contextes suivantes : **relation fonctionnelle**, **modèle de régression**, **modèle d'analyse de la variance**, **modèle d'analyse de la covariance**, **modèle d'interdépendance**, etc. Dans ce type de modèles, certaines **caractéristiques** (le plus souvent, l'**espérance**) de **variables endogènes** dépendent, de façon non linéaire, de **variables exogènes** et de **paramètres d'intérêt** (interprétables). Ainsi, l'équation $b \in \mathbf{R}^Q \mapsto F(b) = z \in \mathbf{R}^N$ d'un modèle de régression non linéaire définit une **variété stochastique** dans l'**espace** $\mathbf{R}^{Q+N}$;

(c) **estimateur ensembliste** ou **tests associés**. Ces notions sont définies dans le cadre des méthodes d'estimation ensembliste (cf **estimation** par **région de confiance**). Si $S(\alpha)$ désigne une famille de régions de confiance associées à un même **niveau de confiance** $1 - \alpha$, alors la **frontière** de chacune de ces régions est une variété non linéaire stochastique.

Dans les contextes précédents, le concept de **variété différentielle** constitue, moyennant des hypothèses de **continuité** ou de **différentiabilité** pr aux paramètres, un instrument particulièrement adapté.

Les (sous-)variétés en question sont, en général, aléatoires car elles dépendent des observations X elles-mêmes (école classique), ou des observations X et du paramètre utile θ (école bayésienne) (cf **paramètre d'intérêt**, **paramètre principal**). Leur étude conduit à la définition de notions de base tq celle de **plan tangent** (en un point d'une variété), de **courbure** (locale ou globale), de **connexion** (linéaire ou affine), de différentiation (cf **différentiabilité**) et d'**optimisation** sur une variété, etc.

L'interprétation géométrique est souvent, ici encore, un moyen d'illustration et d'analyse très utilisé.