LOI ARC SINUS (C7, N2)
(24 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **loi Arc sinus** est une **loi de probabilité** dont la **fr** est la détermination principale de l'**inverse** d'une fonction sinus. Cette loi est souvent associée aux **trajectoires** du **mouvement brownien**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars**.

On dit que ξ suit la **loi Arc sinus**, ou **loi de P.P. LÉVY**, ssi sa fr est :

(1) $F(x) = \mathbf{1}_{]0,1[} \, . \, (2 / \pi) \, . \, \text{Arc sin}\,(x^{1/2}), \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$

On note parfois $\xi \sim \mathcal{AS}$ ou $\xi \sim \mathcal{A}$ la loi de ξ ainsi définie.

C'est donc une **loi beta** particulière, ie $\mathcal{AS} = \beta\,(1/2, 1/2)$. Autrement dit, si $\upsilon \sim \mathcal{U}\,(-\pi/2 , +\pi/2)$ (**loi uniforme**), alors la va $\xi = \sin \upsilon$ suit une loi Arc sinus.

On montre que :

(2) $$E\,\xi = 1 / 2, \qquad V\,\xi = 1 / 8.$$

(ii) Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite iid** selon une **vars** $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ dont la loi est P^{ξ}. On pose $T_N = \Sigma_{n=0}^{N} X_n$ (total) et l'on définit la suite de va entières suivante (nombre de sommes positives parmi les N+1 sommes) :

(2) $\nu_N = \Sigma_{n=0}^{N} \mathbf{1}([T_N > 0]), \qquad \forall N \in \mathbf{N}.$

Si l'hypothèse :

(3) $a_N = P([T_N > 0]) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} a_\infty \in \,]0, 1[$

est vérifiée, on établit la **propriété caractéristique de la loi Arc sinus** :

(4) $P(N^{-1} \nu_N < t) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} \pi^{-1} \, . \, \sin(\pi\, a_\infty) \, . \int_0^t u^{a\infty - 1} (1 - u)^{- a\infty}\, du,$

où $a\infty$ désigne a_∞ .

En particulier, si P^{ξ} est une **loi symétrique**, on a :

(5) $\mathcal{L}(N^{-1} . \nu_N) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{A}.$