LOI A PRIORI NON INFORMATIVE (G3, G6)
(12 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **théorie bayésienne** est fondée sur l'existence d'une **loi a priori** relative au paramètre d'un modèle. Elle est donc tributaire de l'existence de lois qui peuvent être de types variés.

(i) Soit ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$) un **modèle statistique**, X : $\Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **variable aléatoire** et Π une **loi a priori** définie sur une **tribu** $\mathcal{B}_\Theta$ de parties de Θ.

On définit le **gain d'information (au sens de LINDLEY)** apporté par X sur Π comme la différence entre informations suivante :

(1) $G_X(\Pi) = I_X(\Pi) - I(\Pi)$.

Sous certaines hypothèses (notamment lorsque X est un **échantillon iid** à valeurs dans $\mathbf{R}^N$, que $\Theta \subset \mathbf{R}^Q$ et que les lois a priori possibles Π sont dominées par une **mesure positive** σ-finie ν, définie sur $\mathcal{B}_\Theta$), on montre qu'une solution (formelle) asymptotique ($N \to +\infty$) du **problème d'optimisation** :

(2) $\sup_{\{\Pi : \Pi(\Theta) = 1\}} G_X(\Pi)$

est donnée par une mesure $\Pi^\sim$ dont la **densité** (pr à ν) est de la forme :

(3) $p^\sim(\theta) = (d\Pi^\sim / d\nu)(\theta) = c . \{\text{Dét } I(\theta)\}^{1/2}$,

où $I(\theta) \in M_Q(\mathbf{R})$ est la **matrice d'information de FISHER** associée à X (cf **information de FISHER**) et c un **coefficient** de **normalisation**.

(ii) On appelle **loi a priori non informative (au sens de H. JEFFREYS)** la solution $\Pi^\sim$ du problème (2) dont la densité $p^\sim$ est donnée par (3).

Lorsque la fonction :

(4) $\theta \mapsto \{\text{Dét } I(\theta)\}^{1/2}$,

n'est pas intégrable (pr à ν), on dit que $\Pi^\sim$ est une **loi a priori impropre** (non informative (au sens de JEFFREYS)). Une telle loi est invariante pour le groupe $\overline{\mathcal{G}}$ des transformations bimesurables de Θ (cf **application bimesurable**).