

LOI ASYMPTOTIQUE (C7, E2)

(10 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Notion typique dans l'étude des propriétés limites des **suites** de variables aléatoires. Une **loi asymptotique** est souvent une loi « simple » (cf aussi **forme légale**) et l'étude d'un « **grand** » **échantillon** s'effectue directement avec celle-ci.

(i) Soit $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'**espaces probabilisés**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'observation** et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de **variables aléatoires** $X_n : \Omega_n \mapsto \mathcal{X}$.

On dit que X suit asymptotiquement la **loi** Q , ou que Q est la **loi asymptotique** de X , ssi :

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(X_n^{-1}(B)) = Q(B), \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

ie ssi la suite $\mathcal{P} = (P^{X(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ des lois des $va X_n$ admet pour limite (au sens des **fonctions d'ensemble**) une lp Q définie sur $\mathcal{B}$.

$$(1)' \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{X(n)} \text{ ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(X_n) = Q, \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

en notant $\mathcal{L}(\xi)$ la loi P^ξ d'une $va \xi$, et $X(n)$ pour désigner X_n .

On dit alors que Q est la **limite asymptotique** de la suite $\mathcal{P}$ et l'on note :

$$(2) \quad P^{X(n)} \rightarrow Q, \quad \text{ou } \lim_n P^{X(n)} = Q, \quad \text{ou } P^{X(n)} \rightarrow Q, \quad \text{ou } \lim P^{X(n)} = Q, \quad \text{etc.}$$

On peut aussi considérer que Q est la **lp** d'une **va** $X_\infty : \Omega_\infty \mapsto \mathcal{X}$, et l'on note alors $Q = P^{X(\infty)}$ ou $\mathcal{L}(X_\infty)$ (avec $\lim_n \Omega_n = \Omega_\infty$). Par suite, on note :

$$(3) \quad \mathcal{L}(X_n) \rightarrow \mathcal{L}(X_\infty) \quad \text{ou} \quad \lim_n \mathcal{L}(X_n) = \mathcal{L}(X_\infty), \quad \text{etc.}$$

(ii) En pratique, la suite $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est souvent une suite constante, ie $(\Omega, \mathcal{F}, P)_{n \in \mathbf{N}}$ (l'**espace fondamental** étant fixe). Souvent aussi, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ est un espace produit $(\prod_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{X}_n, \otimes_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{B}_n)$ (cf **produit d'espaces mesurables**). Alors $X_n : \Omega \mapsto \mathcal{X}_n$ définit une suite de $va X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et X_n admet la lp définie par :

$$(4) \quad P^{X(n)} = X_n(P), \quad \text{ie } P((X_n^{-1}(B_n))) = P^{X(n)}(B_n), \quad \forall B_n \in \mathcal{B}_n \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},$$

où l'on note aussi $X(n)$ pour désigner la $va X_n$ ($\forall n \in \mathbf{N}$).

On considère alors l'espace produit précédent (espace d'**échantillonnage** avec indépendance) comme plongé dans l'**espace produit « asymptotique »** $(\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n, \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n, \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(X_n))$ (cf **plongement**), ce qui définit une $\mathbb{P}$:

$$(5) \quad Q = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} P^{X(n)}, \quad \text{notée aussi } \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(X_n),$$

parfois appelée **loi asymptotique** de X .

Cette loi est tq, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, sa **projection** sur $\bigotimes_{n=0}^N \mathcal{B}_n$ n'est autre que la **loi d'échantillonnage**, ie la loi $\mathcal{L}(X_0, X_1, \dots, X_N) = \bigotimes_{n=0}^N P^{X(n)} = (X_0, X_1, \dots, X_N)(P)$, image de P par l'échantillon $X(N) = (X_0, X_1, \dots, X_N)$. De plus, elle vérifie les **conditions de compatibilité de A.N. KOLMOGOROV** (cf **axiomes de KOLMOGOROV**).

(iii) Les lois asymptotiques interviennent :

(a) dans les questions de **limite centrale** (cf **loi des grands nombres, théorème de la limite centrale**) ;

(b) dans l'étude des « **petits** » **échantillons** : lorsque les lois concernées sont complexes, leurs limites peuvent s'avérer plus simples à étudier.