LOI AUTO-DÉCOMPOSABLE (E2, E3)
(07 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La notion de **loi auto-décomposable** intervient surtout dans le **problème de la limite centrale** et celui de l'**infinie divisibilité** des lois (cf **loi infiniment divisible**).

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de **loi** P^ξ et de **fonction caractéristique** φ.

On dit que P^ξ (resp φ) est une **loi auto-décomposable** (resp une **fonction caractéristique auto-décomposable**) ssi, $\forall\ \alpha \in\ ]0, 1[$, il existe une **fc** φ_α tq :

(1) $\quad \varphi = (\varphi \circ h_\alpha) . \varphi_\alpha$,

où le point . désigne le produit ordinaire (ie le produit numérique) des fonctions et où $h_\alpha : t \mapsto \alpha . t$ est l'**homothétie** de rapport α.

Autrement dit :

(2) $\quad \forall\ \alpha \in\ ]0, 1[, \quad \varphi(t) = \varphi(\alpha t) . \varphi_\alpha(t), \qquad \forall\ t \in \mathbf{R}$.

On dit que $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in]0,1[}$ est la **famille des composantes** de φ.

(ii) On montre que :

(a) si φ est auto-décomposable, alors $\varphi \neq 0$ (fonction non nulle) ;

(b) dire que P^ξ est auto-décomposable équivaut à dire que P^ξ appartient à la famille des lois limites (cf **loi asymptotique**) des **suites** normées suivantes :

(3) $\quad T_N^* = (T_N / b_N) - a_N \qquad$ (cf **variable normée**),

ie des suites $(T_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ centrées relativement aux suites $a = (a_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ et réduites relativement aux suites $b = (b_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$), avec $(a_N , b_N) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$, $\forall\ N \in \mathbf{N}^*$, où l'on note $T_N = \Sigma_{n=1}^N X_{Nn}$ et où $(X_{N1} ,..., X_{NN})_{N \in \mathbf{N}^*}$ désigne une **suite triangulaire** indépendante constituée de suites finies de vars $X_{Nn} : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ (cf **suite indépendante**).

Cette équivalence vaut aussi pour les fc.

De plus, P^ξ (resp φ) est une **loi infiniment divisible**.

(iii) A titre d'exemple, la **loi de DIRAC** placée au point $a \in \mathbf{R}$, $P^\xi = \delta_a$ est auto-décomposable.