

LOI BETA-BINOMIALE (C7, C8)

(07 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La **loi beta-binômiale** est la loi d'une va binômiale dont le (second) **paramètre** est une va de **loi beta** (cf **loi composée**).

(i) Soit $\mathcal{B}(n, p)$ la **loi binômiale**. On suppose que son paramètre p est aléatoire et qu'il suit une loi beta de paramètre $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, ie $p \sim \beta(a, b)$.

On appelle **loi beta-binômiale**, ou **loi hypergéométrique négative**, la loi de la va dont la densité non conditionnelle est obtenue par composition des lois précédentes, ie est donnée par la formule :

$$(1) \quad f(x) = C_n^x \cdot B(x+a, n-x+b) / B(a, b), \quad \forall x \in \{0, 1, \dots, n\} = N_n,$$

où C_n^x désigne un nombre combinaisons et où $B(a, b)$ désigne la **fonction Beta**.

(ii) Si l'on note $\mathcal{B}\mathcal{B}(n, a, b)$ cette loi, on montre que :

$$(a) \quad \mathcal{B}\mathcal{B}(n, 1, 1) = \mathcal{U}(N_n) \text{ (loi uniforme discrète sur } N_n \text{)};$$

$$E \xi = n a / (a + b),$$

$$(b) \quad \xi \sim \mathcal{B}\mathcal{B}(n, a, b) \Rightarrow$$

$$V \xi = a b n (a + b + n) / \{(a + b)^2 (a + b + 1)\}.$$