LOI CONDITIONNELLE (C4, D1)
(18 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Au sein d'un **domaine de connaissance**, l'étude d'un **phénomène** peut nécessiter la connaissance de toutes les **variables** susceptibles d'intervenir dans celui-ci. Ces variables peuvent être :

(a) **connues** ou non de l'**homme de l'art** ou du **statisticien** (cf **spécification**) ;

(b) **observables** ou non par le **système d'observation** (cf **observabilité**, **système statistique**) ;

(c) **internes** ou non au domaine considéré : autre phénomène (relevant du domaine considéré) ou phénomène relevant d'un autre domaine.

Dans certains cas, l'étude peut se limiter aux seules variables à la fois connues et pertinentes (ie relatives au phénomène). Deux approches sont alors possibles :

(a) l'**approche marginaliste**, qui se base sur la loi marginale qui recouvre toutes les variables disponibles directement liées au phénomène, indépendamment des autres variables, parfois appelées **variables étrangères** (cf **loi marginale**). Autrement dit, les valeurs de ces dernières peuvent être quelconques ;

(b) l'**approche conditionnelle**, ou « **approche conditionnaliste** » qui se base sur la loi de toutes les variables disponibles directement liées au phénomène, loi définie conditionnellement aux variables non prises en compte.

Cependant, les valeurs prises par ces dernières ne sont pas nécessairement connues, et sont donc indisponibles : cette approche se réduit alors à la précédente.

(i) La notion de **conditionnement** est centrale en **Statistique** (cf **inférence conditionnelle**). Elle exprime que l'étude d'un **événement aléatoire** (ou d'une **variable aléatoire**) considéré(e) isolément est généralement (a) moins intéressante (ou riche) scientifiquement et (b) moins efficace statistiquement qu'une étude tenant compte d'une éventuelle liaison entre cet évènement (ou cette variable) et d'autres évènements (ou d'autres variables). Ces derniers (évènements ou variables) sont ainsi introduits comme **information** permettant de mieux déterminer les **propriétés stochastiques** du **phénomène** étudié qui est à l'origine de l'évènement (ou de la variable) initial(e).

Cette démarche est parallèle à celle de l'**homme de l'art**, lorsque ce dernier cherche à « expliquer » un **phénomène** à l'aide d'informations (variables, observations) jugées « pertinentes ». Elle procède aussi de l'idée de **dépendance** « orientée », voire de **causalité** (cf **loi scientifique**, **relation fonctionnelle**).

Le point de jonction entre ces deux démarches se situe dans les notions de modèles conditionnels ou de problèmes conditionnels : eg **modèle de régression**, **prévision conditionnelle**.

Le **principe de conditionnement** consiste ainsi à considérer que certaines données (évènements ou variables aléatoires) sont conditionnées par d'autres données. C'est, en particulier, un fondement des importants concepts de **relation fonctionnelle** ou de **régression**.

Ainsi, la notion de conditionnement constitue l'un des fondements de l'**école bayésienne** (cf **postulat de BAYES**, **théorème de BAYES**, **principe bayésien**, **théorie bayésienne**).

La mise en oeuvre de ce principe nécessite la définition préalable d'une notion « technique » de base : celle de **loi de probabilité conditionnelle**, ou simplement **loi conditionnelle**. Cette notion suppose donc la donnée préalable d'une **loi multivariée**, et en particulier d'une **loi multidimensionnelle**.

(ii) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ deux **espaces mesurables** auxiliaires, et $(\xi, \eta) : \Omega \mapsto \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ un **couple aléatoire**.

On appelle **loi (de probabilité) conditionnelle de** η **sachant** ξ, ou **loi (de probabilité) conditionnelle de** η **pr à** ξ, ou encore **loi (de probabilité) conditionnelle de** η **relativement à** ξ, une fonction notée $P^{\eta/\xi}$, $P^{\eta}(\,.\,/\,\xi)$ ou encore $P^{\eta}{}_{/\xi}$, définie sur $\mathcal{X} \times \mathcal{C}$ et à valeurs dans [0,1], tq :

(a) l'**application** $C \mapsto P^{\eta}{}_{/\xi}(x, C)$ est, $\forall\, x \in \mathcal{X}$, une **mesure de probabilité** sur $\mathcal{C}$;

(b) l'application $x \mapsto P^{\eta}{}_{/\xi}(x, C)$ est, $\forall\, C \in \mathcal{C}$, une détermination de la **probabilité conditionnelle** $P(\eta^{-1}(C) / \xi)$.

Une loi conditionnelle peut aussi se noter $\mathcal{L}(\eta / \xi)$, $\mathcal{L}^{\eta}(\,.\,/\,\xi)$ ou encore $\mathcal{L}^{\eta}{}_{/\xi}$.

(iii) Si une telle fonction $P^{\eta/\xi}$ existe, alors, quelle que soit la fonction mesurable $\varphi : \mathcal{Y} \mapsto \mathbf{R}$ tq la **va** $\varphi(\eta)$ soit intégrable (cf **application mesurable**, **fonction intégrable**), la va $\psi(\xi)$ définie par :

(1) $$\psi(x) = \int_{\mathcal{Y}} \varphi(y)\, P^{\eta/\xi}(x, dy), \qquad \forall\, x \in \mathcal{X},$$

est une détermination (ie un élément de la **classe d'équivalence**) de l'**espérance conditionnelle** $E(\varphi(\eta) / \xi)$.

On montre que, sous des conditions assez larges, la loi conditionnelle de η sachant ξ existe.

On définit, de façon symétrique, la lp conditionnelle de ξ sachant η, et on la note $P^{\xi/\eta}$, $P^{\xi}(\,.\,/\,\eta)$ ou encore $P^{\xi}{}_{/\eta}$.

Par ailleurs, si P^{ξ} est la **loi marginale** (ie la **loi propre**) de ξ et si Q : $\mathscr{X}$ x $\mathscr{C}$ $\mapsto$ [0,1] est une **probabilité de transition**, on peut définir une **lp** unique N sur l'espace ($\mathscr{X}$ x $\mathscr{Y}$, $\mathscr{B} \otimes \mathscr{C}$) tq :

(2) $\quad N(B \times C) = \int_B Q(x, C)\, dP^{\xi}(x), \qquad \forall (B, C) \in \mathscr{B} \times \mathscr{C}.$

Q s'interprète alors comme la loi (de probabilité) conditionnelle $P^{\eta}{}_{/\xi}$ de η sachant ξ (cf **théorème de JIRINA**).

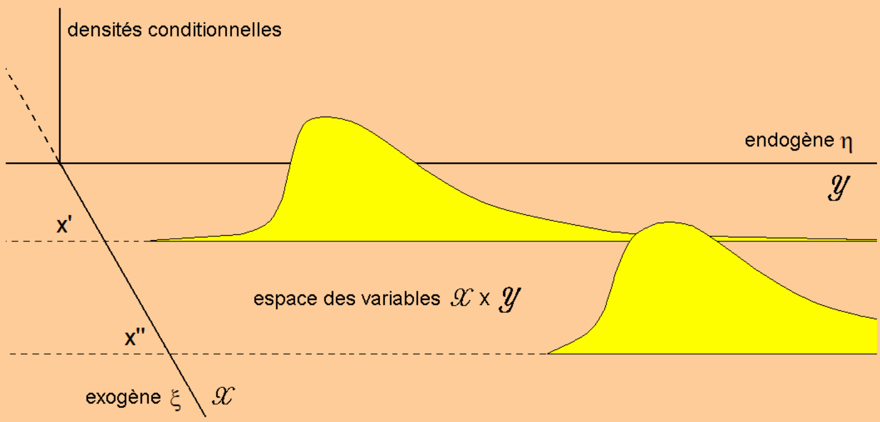
La variable η est généralement appelée **variable conditionnée** (par ξ), et la variable ξ **variable conditionnante**, ou **variable de conditionnement**.

La variable de conditionnement est aussi appelée **variable exogène** (cf **régression**) et la variable conditionnée **variable endogène** ;

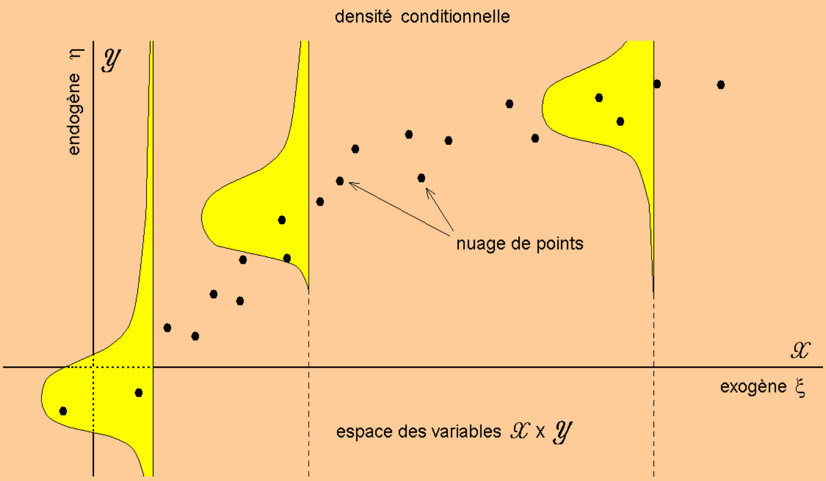
(iv) Des formules tq (1) permettent de calculer une **caractéristique** quelconque d'une loi conditionnelle : eg **moment**, **quantile**, **mode**, **densité**, **fr**, **fc**, etc. Cette caractéristique est alors appelée **caractéristique conditionnelle** : eg moment conditionnel, quantile conditionnel, mode conditionnelle, densité conditionnelle, fr conditionnelle, fc conditionnelle, etc.

(v) On peut illustrer la notion de loi conditionnelle à l'aide de représentations graphiques, eg dans le cas de variables numériques et d'une loi à densité « continue » :

(a) représentation en trois dimensions, ie : l'espace d'observation produit $\mathscr{X}$ x $\mathscr{Y}$ et l'ensemble $\mathbf{R}_+$ des valeurs de la densité conditionnelle (cf schéma ci-dessous) ;



(b) représentation en deux dimensions : espace d'observation $\mathscr{X}$ et espace d'observation $\mathscr{Y}$ (cf schéma ci-dessous).



La densité conditionnelle est ici représentée par « superposition ».

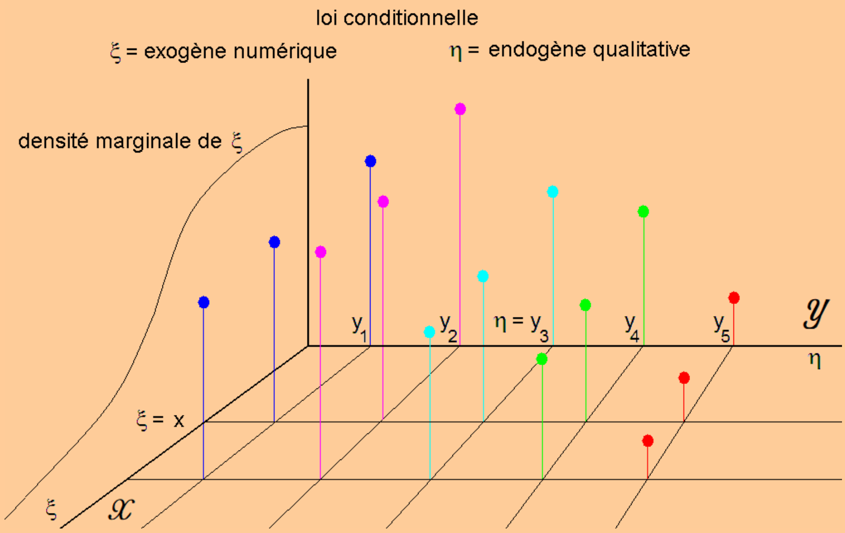
Si $\{(X_1 , Y_1) ,..., (X_N , Y_N)\}$ sont des observations relatives au **couple aléatoire** (ξ , η), le **nuage de points** $(X_n , Y_n) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ montre la répartition des ces observations dans l'espace des variables $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

(vi) Les définitions précédentes valent encore pour un **vecteur aléatoire**, et conduisent à définir des notions (ou caractéristiques) tq **dispersion** conditionnelle, **matrice des corrélations** conditionnelle, etc.

(vii) Plus généralement, et sous certaines conditions, on peut définir les concepts de **loi marginale** et de **densité marginale** à partir d'une suite de va qui est « mixte », ie dont une sous-suite est constituée de **variables numériques** et l'autre sous-suite de **variables qualitatives** (cf **loi multivariée**).

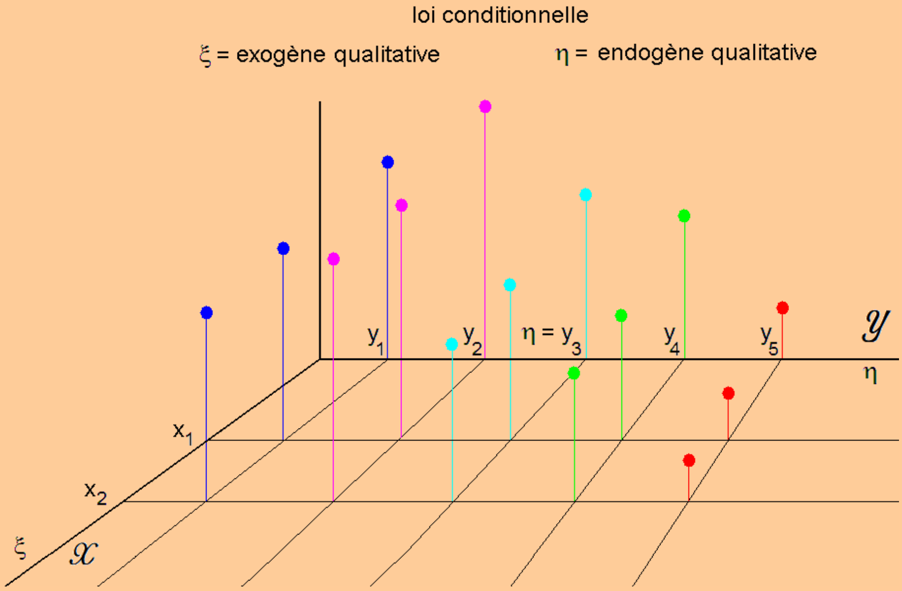
Ainsi, lorsqu'une variable est une **variable qualitative** et l'autre une **variable quantitative** (ie numérique), on peut distinguer plusieurs cas :

(a) **variable qualitative** η conditionnée et **variable quantitative** ξ conditionnante. Si l'on note $\{y_1 ,..., y_H\}$ les H **modalités** (supposées en nombre fini) de η et $\mathscr{L}(\xi , \eta)$ la loi du couple (ξ , η), la loi conditionnelle $\mathscr{L}(\eta / \xi)$ est définie par la **suite** des lois $\mathscr{L}(y_h / \xi)$ (cf graphique ci-dessous) ;



(b) **variable quantitative** conditionnée et **variable qualitative** conditionnante (cf eg **modèle d'analyse de la variance**) ;

(c) toutes les variables sont qualitatives (cf graphique ci-après) (cf **tableau de contingence**).



(d) dans le cas de variables (endogènes ou exogènes) « multivariées », certaines des variables « univariées » sont qualitatives, les autres étant numériques. Les représentations précédentes peuvent être étendues.

(viii) Lorsque certaines variables numériques sont de type discret (cf **loi discrète**, **variable discrète**), l'analyse est analogue. Il convient alors de distinguer entre les valeurs discrètes et les modalités qualitatives.