LOI DE FISHER - MISES (C7, C11)
(21 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **loi de FISHER - MISES** est une **loi directionnelle** typique.

(i) On appelle **loi de R.A. FISHER - R.M.E. von MISES** une **loi de probabilité** P^{ξ} à $K \geq 2$ dimensions, dont la **densité** pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_K est de la forme :

(1) $f(x) = \mathbf{1}(B_K)(x) . c_K(\gamma). e^{\gamma(\alpha' x)}$, $\forall x \in \mathbf{R}^K$,

dans laquelle :

(a) le **coefficient** $\gamma > 0$ est appelé **paramètre de concentration** et indique la direction vers laquelle le **vecteur aléatoire** ξ « concentre » sa probabilité (cf **coefficient de concentration**, **concentration**) ;

(b) α est le le **mode** de P^{ξ}, ie le vecteur unitaire de **« direction » la plus probable**, ou de **direction « typique »** ;

(c) $c_K(\gamma) = \gamma^{(K/2)-1} / \{(2\pi)^{K/2} J_{(K/2)-1}(\gamma)\}$ est la **constante** de **normalisation**, dans laquelle $J_p(\gamma)$ désigne la **fonctions de BESSEL** modifiée de première espèce d'ordre $p \in \mathbf{R}_+^*$;

(d) B_K est la sphère unité de $\mathbf{R}^K$ (donc Supp f = Supp $P^{\xi} = B_K$) (cf **boule d'un espace métrique**).

(ii) En particulier :

(a) si $\gamma = 0$, $P^{\xi} = \mathcal{U}(B_K)$ (**loi uniforme** sur la sphère unité B_K) ;

(b) si $\gamma > 0$, P^{ξ} est une **loi unimodale**, de **mode** $S\,\xi = \alpha$.

(iii) Soit $X = (X_1, \ldots, X_N)$ un **échantillon iid** selon P^{ξ}. L'**estimateur du maximum de vraisemblance** α_N de α est :

(2) $\alpha_N = \overline{X}_N / || \overline{X}_N ||$,

où l'on note $||u||^2 = \Sigma_{k=1}^{K} u_K^2$ la distance euclidienne usuelle.

Le test de l'hypothèse $H_0 : \gamma = 0$ (absence de direction privilégiée : ie P^{ξ} est une **loi isotrope**) est appelé **test de J.W.R. RAYLEIGH**. La **statistique de test** associée à un **test uniformément le plus puissant** est de la forme : $R_N = r_N(||X||)$ (ie dépend de la **norme** de X).

On établit (G.N. WATSON) la **convergence en loi** suivante :

(3) $$R_N (\alpha_N - \alpha) \xrightarrow{\mathscr{L}}_{N \to +\infty} \mathscr{N}_K (0, A),$$

avec :

(4) $$\begin{aligned} A &= I_K - \{\gamma\, R_K (\gamma)\}^{-1} a\, a', \\ R_K (\gamma) &= J_{K/2} (\gamma) / J_{(K/2)-1} (\gamma). \end{aligned}$$

Ces propriétés permettent d’effectuer divers tests.