LOI DE FISHER-SNEDECOR (C7, F5)
(08 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $(\xi, \eta) : \Omega \mapsto \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ (avec $n \geq 1$, $n \geq 1$) un **couple aléatoire** vectoriel, ie formé des **vecteurs aléatoires** indépendants entre eux ξ et η à valeurs resp dans $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$. On suppose que :

(1) $\quad P^{(\xi,\eta)} = \mathcal{N}_{m+n}(0, I_{m+n})$ $\quad$ (**loi normale**).

On appelle alors **loi de R.A. FISHER - G.W. SNEDECOR (centrale)**, ou simplement **loi de R.A. FISHER (centrale)** à m et n **degrés de liberté** la loi P^{ψ} de la **va** suivante :

(2) $$\psi = \begin{cases} (\|\xi\|^2 / m) / (\|\eta\|^2 / n), & \text{si } \|\eta\| \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

P^{ψ} est notée $\mathcal{F}(m, n)$ ou $\mathcal{F}_{mn}$.

Ses **paramètres** sont ainsi les nombres entiers m et n : ie $(m, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$.

(ii) On montre que :

(a) inversion des variables et permutation des paramètres :

(3) $\quad \psi \sim \mathcal{F}(m, n) \Leftrightarrow \psi^{-1} \sim \mathcal{F}(n, m)$;

(b) relation avec la loi de STUDENT :

(4) $\quad \tau \sim \mathcal{S}(n)$ (**loi de STUDENT**) $\Leftrightarrow \tau^2 \sim \mathcal{F}(1, n)$;

(c) relation de **dualité** entre **quantiles**. Si $\psi_1 \sim \mathcal{F}(m, n)$ et $\psi_2 \sim \mathcal{F}(n, m)$, alors :

(5) $\quad (Q_p\, \psi_1)(Q_{1-p}\, \psi_2) = 1, \qquad \forall\, p \in]0, 1[$;

(d) la **densité** de P^{ψ} pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_1 s'écrit :

(6) $$f(t) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(t) \,.\, \{\mathrm{B}(m/2\,, n/2)\}^{-1} (m / n)^{m/2} \{1 + (m/n)\, t\}^{-(m+n)/2}\, t^{(m/2)-1}, \quad \forall\, t \in \mathbf{R},$$

où $\mathbf{1}(R)$ désigne l'**indicatrice** d'une partie $R \in \mathbf{R}$ et B la **fonction Beta** ;

(e) les deux premiers **moments algébriques** de P^ψ sont :

$$(7) \quad \begin{array}{ll} E\,\psi = n / (n - 2), & \text{si } n > 2 \text{ (}\textbf{espérance}\text{)}, \\ V\,\psi = (2 / m) \{(m + n - 2) / (n - 4)\}\, E\,\psi^2, & \text{si } n > 4 \text{ (}\textbf{variance}\text{) ;} \end{array}$$

(f) si $\kappa \sim \mathcal{X}_n^2$ (**loi du chi-deux** à n degrés de liberté) et si $\psi \sim \mathcal{F}(m, n)$, on établit la **convergence en loi** suivante :

$$(8) \quad \mathcal{L}(\psi) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\kappa / n),$$

ou encore (plus correctement) $\mathcal{L}(n \,.\, \psi) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\kappa)$.

(iii) La loi de FISHER est parfois appelée **loi des petits échantillons**.

Cette catégorie de lois permet une étude relativement aisée des « petits » échantillons. En effet, la loi de STUDENT aussi bien que la loi de FISHER, sont des **lois d'échantillonnage** « exactes » suivies par certaines statistiques dès que l'hypothèse de **normalité** est validée.

Cette dernière hypothèse est cependant parfois :

(a) tantôt une hypothèse par défaut ;

(b) tantôt une conséquence de la **loi des grands nombres**.

(iv) La loi de FISHER est parfois aussi appelée **loi du rapport des variances**, car le rapport des **variances empiriques**, calculées sur des échantillons gaussiens indépendants, suit une loi de FISHER.

Cette propriété est souvent vraie pour des rapports entre statistiques de type « quadratique » associées à des variables gaussiennes.