LOI DE LAPLACE (C7)

(24 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le nom de P.S. de LAPLACE s'associe à deux **lois de probabilité** :

(a) la **seconde loi de LAPLACE**, souvent appelée **loi normale**, ou **loi gaussienne**, ou encore **loi de GAUSS-LAPLACE** ;

(b) la **première loi de LAPLACE**, ou loi doublement exponentielle, qui suit.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** dont la **loi** est P^ξ .

On dit que P^ξ est la **(première) loi de P.S. de LAPLACE**, ou **loi (doublement) exponentielle**, ssi P^ξ admet, pr à la **mesure de LEBESGUE**, une **densité** de la forme :

$$(1) \quad f(x) = 2^{-1} \cdot e^{-|x|}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

La loi de LAPLACE est parfois notée $\mathcal{L}(0, 1)$ ou $\mathcal{E}(0, 1)$.

(ii) Elle vérifie les propriétés suivantes :

(a) **moments algébriques** :

$$(2) \quad \mu_j = m_j = \begin{cases} 0, & \forall j \in 2\mathbf{N} + 1, \\ j!, & \forall j \in 2\mathbf{N}^*, \end{cases}$$

où m_j désigne le moment centré. En particulier, $E \xi = 0$ (**espérance**), $V \xi = 2$ (**variance**) ;

(b) coefficients de FISHER : $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 3$ (cf **coefficient d'aplatissement**, **coefficient d'asymétrie**) ;

(c) **fonction caractéristique** :

$$(3) \quad \varphi(t) = (1 + t^2)^{-1}, \quad \forall t \in \mathbf{R} ;$$

(d) **cumulants** :

$$(4) \quad K_j = \begin{cases} 0 & \forall j \in 2\mathbf{N} + 1, \\ 2(j-1)! & \forall j \in 2\mathbf{N}^* ; \end{cases}$$

(e) si ξ est une **variable laplacienne** (ie si $\xi \sim \mathcal{G}(0, 1)$), alors $|\xi|$ est une va exponentielle : ie $|\xi| \sim \gamma_1(0, 1)$ (**loi exponentielle**).

(iii) Si $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ est un **paramètre d'échelle et de position** (cf aussi **paramètre de position** et **paramètre d'échelle**), la **densité** de la loi de la va $\eta = \alpha + \beta \xi$ définit la **forme générale** de la loi de LAPLACE, ie la forme doublement exponentielle suivante :

$$(4) \quad g(y) = (2\beta)^{-1} \cdot e^{-|y-\alpha|/\beta}, \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

La loi P^η de η est alors notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ ou $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$.

(iv) Une généralisation directe de la loi précédentes s'obtient à partir d'une suite finie $(\xi_1, \dots, \xi_K) = \xi$ constituée de variables laplaciennes indépendantes. La densité produit :

$$(5) \quad f(x) = \prod_{k=1}^K f(x_k) = 2^{-K} \cdot e^{-\|x\|}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_K) \in \mathbf{R}^K,$$

dans laquelle $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne, permet de construire diverses lois : eg en posant $\eta = \varphi(\xi)$ (cf **changement de variable aléatoire**).