LOI DE POISSON (C7, N2)
(16 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Autrefois appelée **loi des « évènements rares »**, car elle s'ajustait bien à des **observations** de cette nature, la **loi de POISSON** est une **loi discrète** classique à un paramètre.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{N}$ une **va** entière scalaire de **loi** P^{ξ}.

(i) On dit que P^{ξ} est une **loi de S.D. POISSON**, ou ssi elle s'écrit sous la forme :

(1) $P^{\xi} = \Sigma_{x \in \mathbf{N}} e^{-\lambda} . (\lambda^{x} / x!) \delta_{x}$, $\forall x \in \mathbf{R}$,

où $\lambda > 0$ est un **paramètre** réel et δ_x désigne la **loi de DIRAC** qui charge le point x.

La **« densité »** de P^{ξ} pr à la **mesure de comptage** sur **N** s'écrit :

(2) $f(x) = e^{-\lambda} (\lambda^{x} / x!)$, $\forall x \in \mathbf{N}$.

On note généralement $P^{\xi} = \mathcal{P}(\lambda)$ la loi de POISSON et la va ξ s'appelle **variable de POISSON**, ou **variable poissonnienne**.

(ii) On montre que :

(a) les deux premiers **moments algébriques** de $\mathcal{P}(\lambda)$ sont : $E\xi = V\xi = \lambda$;

(b) son **mode** $S\xi$ est la solution en x des inégalités $\lambda - 1 \leq x \leq \lambda$;

(c) les **moments centrés** μ_j sont déterminés selon l'**équation de récurrence** :

(3) $\mu_{j+1} = \lambda \{(d\mu_j / d\lambda) + j . \mu_{j-1}\}$, avec $\mu_0 = 1$;

(d) les **moment factoriel** valent : $\mu_{[j]} = \lambda^{j}$;

(e) les coefficient de FISHER sont : $\gamma_1 = \lambda^{-1/2} > 0$ et $\gamma_2 = \lambda^{-1}$ (cf **coefficient d'aplatissement**, **coefficient d'asymétrie**);

(f) la **fonction génératrice** s'écrit : $g(u) = e^{\lambda(u-1)}$;

(g) la **fonction caractéristique** s'écrit : $\varphi(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$;

(h) les **cumulants** valent : $K_j = \lambda, \forall j \in \mathbf{N}$.

(iii) La loi de POISSON se rencontre dans deux contextes principaux.

(a) en **calcul des probabilités**. Soit $A \in \mathcal{T}$ un **événement** dont la **probabilité** $p = P(A)$, au cours d'une **expérience aléatoire** $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, est supposée faible (ie $p << 1$). On établit que le nombre ξ d'occurrences de A, au cours d'un grand nombre N ($N >> 0$) de telles expériences indépendantes, est une **va** qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = \lim_{N,p} N\, p$. En effet, la va ξ suit la **loi binômiale** $\mathcal{B}(n, p)$, laquelle tend vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque $N \to +\infty$ et que $p \to 0+$ en sorte que $N\, p \to \lambda$ (constante). Plus précisément, on suppose que $N\, p = \lambda + \varepsilon(N)$, avec $\lim_N \varepsilon(N) = 0$ (ceci implique que p dépend de N, soit $p = p_N$, et que $\lim_N p_N = 0+$) ;

(b) en **théorie des processus**, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et une **suite** $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'**événements** $A_n \in \mathcal{T}$ se réalisant à des instants aléatoires T_n, avec $T_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Par suite, si les trois conditions suivantes :

(b_1) le nombre d'événements A_n réalisés pendant l'intervalle de temps $[t, t+dt[$ est indépendant (en probabilité) du nombre d'événements réalisés pendant l'intervalle de temps $[0, t[$ (cf **indépendance stochastique**) ;

(b_2) la probabilité d'au moins 1 occurrence A_n pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt[$ est (quasiment) proportionnelle à la durée dt :

(4) $\quad \pi_1(t, t + dt) = p\, dt + o(dt), \qquad$ avec $\lim_{dt \to 0+} o(dt) / dt = 0$;

(b_3) la probabilité d'au moins 2 occurrences A_n pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt[$ est négligeable :

(5) $\quad \pi_x(t, t + dt) = o(dt), \qquad \forall\, x \geq 2, \qquad$ avec $\lim_{dt \to 0+} o(dt) / dt = 0$,

sont réalisées, la suite A définit un **processus de POISSON**.

Si $\pi_x(0, t)$ désigne la probabilité d'occurrence de $\xi = x$ évènements A_n pendant l'intervalle $[0, t[$, et $\pi_x(t, t + dt)$ la probabilité d'occurrence de $\xi = x$ évènements A_n pendant l'intervalle $[t, t + dt[$, l'**équation génératrice de la loi de S.D. POISSON** s'écrit :

(6) $\quad \pi_x(0, t + dt) = \Sigma_{u=0}^{x}\ \pi_u(0, t) \,.\, \pi_{x-u}(t, t + dt)$,

compte tenu des conditions :

$$\pi_0 (t, t + dt) = 1 - p \,.\, dt + o (dt),$$

(7) $$\pi_1 (t, t + dt) = p \,.\, dt + o (dt),$$

$$\pi_x (t, t + dt) = o (dt), \quad \forall\, x \geq 2.$$

Lorsque $dt \to 0+$, les probabilités $\pi_x (0, t)$ vérifient l'**équation différentielle** :

(8) $$d\pi_x (0, t) / dt = - p \,.\, \{\pi_x (0, t) - \pi_{x-1} (0, t)\},$$

dont la solution n'est autre que la **densité** de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$, avec $\lambda = p\, t$:

(9) $$\pi_x (0, t) = e^{-p\,t} (pt)^x / x\,! , \quad \forall\, x \in \mathbf{N}.$$

Ainsi, la loi du nombre d'occurrences de A_n sur l'intervalle $[0, t[$ est $\mathscr{P}(pt)$, et la loi du nombre d'occurrences de A_n sur $[t, t + dt\,[$ est $\mathscr{P}(p \,.\, dt)$, quel que soit $t \in \mathbf{R}_+$.

Par suite, les nombres d'occurrences d'évènements A_n sur les périodes $[0, t_1 [$, $[t_1 , t_2[$,..., $[t_{k-1} , t_k[$, etc, sont des va de POISSON, indépendantes dans leur ensemble, dont les lois resp sont $\mathscr{P}(p \,.\, t_1)$, $\mathscr{P}(p \,.\, (t_2 - t_1))$,..., $\mathscr{P}(p \,.\, (t_k - t_{k-1}))$, etc. Ces lois ne dépendent donc pas des « instants » t_k mais seulement des « durées » $d_k = t_k - t_{k-1}$ (cf **processus à accroissements indépendants**).

On peut remplacer la condition (2) ci-dessus par la suivante :

(4)' $$\pi_1 (t, t + dt) = p (t)\, dt + o (dt),$$

dans laquelle $p : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$ est une fonction continue arbitraire.

(iv) Enfin, on appelle **famille de lois de S.D. POISSON**, ou **famille poissonnienne**, la **famille** des **lp** $\mathscr{P}_{\alpha,\beta} (\lambda)$ associée à la famille des **fc** suivante :

(10) $$\varphi_{a,b} (t) = \exp \{i\, t\, a + e^{i\,t\,b} - 1\}, \quad \forall\, (a, b, \lambda) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*.$$

Cette famille se note aussi $\mathscr{P}(\alpha, \beta, \lambda)$ ou $\mathscr{P}_\lambda (\alpha, \beta)$ et vérifie les propriétés suivantes :

(a) si $(a, b) = (0, 1)$, on a $\mathscr{P}_\lambda (0,1) = \mathscr{P}(\lambda)$ (loi de POISSON) ;

(b) stabilité par **convolution** (cf **convolution des lois**) :

(11) $$\mathscr{P}(a_1 , b, \lambda_1) * \mathscr{P}(a_2 , b, \lambda_2) = \mathscr{P}(a_1 + a_2 , b, \lambda_1 + \lambda_2).$$

En particulier, si $\xi_1 \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $\xi_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$ sont 2 va poissonniennes indépendantes, alors $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Par suite, $\xi \sim \mathscr{P}(\lambda) \Rightarrow \mathscr{P}(\lambda)^{\otimes N} = \mathscr{P}(N\,\lambda)$.

Enfin, les lois de POISSON vérifient la **propriété asymptotique** :

(12) $\quad \xi \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $\lambda \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}\{\lambda^{-1/2} . (\xi - \lambda)\} \to \mathscr{N}_1(0, 1)$ (**loi normale**).