LOI DE POLYÀ (B3, B4, C7)

On appelle **loi de POLYÀ** une **loi discrète** définie selon un **schéma d'urne** (cf **schéma probabiliste**).

(i) La « première » **loi de POLYÀ**, parfois appelée **loi de POLYÀ inverse**, est un cas particulier de la **loi binômiale négative**.

On considère une partition $\{\Omega_1 , \Omega_2\}$ d'un **ensemble** fini (urne) Ω, avec card $\Omega_h = M_h$ et card $\Omega = M_1 + M_2$. Tous les éléments de Ω_h sont supposés indiscernables (eg boules identiques de même couleur de l'urne) : on appelle élément du premier (resp second) type tout élément de Ω_1 (resp de Ω_2).

On procède alors à une **suite** de tirage : à chaque tirage, on extrait au **hasard**, avec remise, des éléments $\omega \in \Omega$ en sorte que, si ω est du type h (h = 1, 2), on augmente Ω_h de R éléments du même type, où $R \geq 1$ est un entier donné a priori. Autrement dit, on extrait une boule de Ω et on la remet avec un nombre (fixé) $R \geq 1$ d'éléments du même type (phénomène de contagion simple) (cf **loi contagieuse**).

La procédure s'arrête lorsque $N \geq 1$ unités d'un type h donné (eg h = 1) sont obtenues. On appelle alors **loi de G. POLYÀ**, ou **loi de F. EGGENBERGER - G. POLYÀ**, (inverse) la **loi** de la **va** ξ égale au nombre d'éléments de type h obtenus au cours de N tirages de cette nature, $N \geq 1$ étant un entier donné a priori.

(ii) La probabilité f_N (x) d'**obtenir x éléments du premier type au N-ième tirage** se déduit du fait qu'ont été tirés :

(a) soit x éléments du premier type en N - 1 tirages et 1 élément du second type au N-ième ;

(b) soit x - 1 éléments du premier type en N - 1 tirages et 1 élément du premier type au N-ième.

On calcule donc f_N (x) selon l'**équation de récurrence** :

(1) $f_N (x) = \{(q\, c / c) + (N - 1)\, f_{N-1} (x)\} + \{(p\, c / c) + (N - 1)\, f_{N-1} (x-1)\}, \quad \forall\, x = 2, 3, ...,$

compte tenu des conditions initiales :

(2) $f_1 (0) = q, \qquad f_1 (1) = p,$

avec $p = M_1 / (M_1 + M_2)$, $q = 1 - p$ et $c = (M_1 + M_2) / R$.

Cette loi dépend de quatre **paramètres** (M_1 , M_2 , R, N), dont trois sont « libres ».

Les éléments de chaque type h jouent un rôle symétrique.

(ii) Diverses variantes de cette dernière loi ont été étudiées, eg :

(a) à chaque fois que l'on tire un élément de type 1, on le remet en ajoutant R éléments de type 2 ;

(b) à chaque fois que l'on tire un élément de type 1, on le remet en ajoutant R éléments de type 1, et à chaque fois que l'on tire un élément de type 2, on le remet en ajoutant S (avec $S \neq R$) éléments de même type 2 ;

(c) on combine (a) et (b), etc.