LOI DE WEIBULL (C7, N8)
(10 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **loi de WEIBULL** est une **loi de probabilité** utilisée notamment en théorie de la **fiabilité** des **systèmes**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$ une **vars** positive dont la **loi** P^ξ admet une **densité** f pr à la **mesure de LEBESGUE** et une **fr** notée F.

On dit que P^ξ est une **loi de W. WEIBULL** ssi sa fonction de **taux d'échec** :

(1) $\gamma(x) = f(x) / (1 - F(x)), \quad \forall x \in \mathbf{R}_+$ tq $F(x) \neq 1$,

est une **fonction puissance** de la forme :

(2) $c(x) = \alpha . x^{\beta - 1}$,

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

(ii) Par suite, la densité f s'écrit, $\forall x \in \mathbf{R}$:

(3) $f(x) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(x) . \alpha . x^{\beta - 1} . e\{-(\alpha / \beta) x^\beta\} = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(x) . c(x) . \exp\{- x . c(x) / \beta\}$.

(iii) Plus généralement, on peut définir la **loi de W. WEIBULL** comme celle de la va ξ ssi $(\xi - x_0)^\beta \sim \gamma_1(0, \alpha / \beta)$ (**loi gamma**), où P^ξ admet pour **support** Supp $P^\xi = [x_0, +\infty[$ et où $x_0 \in \mathbf{R}$, $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$.

Cette forme de la loi de WEIBULL, dont le paramètre est (x_0, α, β), peut se noter $\mathcal{W}(x_0, a, b)$. La définition à partir de la densité (3) en est donc un cas particulier, avec $x_0 = 0$.

(iv) Les notations ou définitions de cette loi ne sont pas toujours uniformes. Ainsi :

(a) on appelle parfois **loi de W. WEIBULL** la loi dont la densité est :

(4) $g(y) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(y) . a b y^{a-1} \exp\{-b y^a\}, \quad \forall y \in \mathbf{R}$,

avec $(a, b) \in \mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}_+^*$. Sa fr s'écrit alors :

(5) $G(y) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(y) . \{1 - \exp(-b y^a)\}, \quad \forall y \in \mathbf{R}$.

En particulier, si a = 1, on obtient la **loi exponentielle** $\gamma_1(0, 1/b)$.

De façon générale, on pose dans ce cas :

(6) η suit une loi de WEIBULL $\Leftrightarrow \eta^a \sim \gamma_1(0, 1 / b)$ (**loi gamma**).

Par suite, ses deux premiers **moments algébriques** sont :

$$(7)\quad \begin{cases} E\,\eta = b^{-1/a} \,.\, \Gamma\{1 + (1/a)\}, \\ V\,\eta = b^{-2/a} \,.\, \{\Gamma(1 + (2/a)) - \Gamma^2(1 + (1/a))\}, \end{cases}$$

où Γ désigne la **fonction Gamma** et Γ^2 son carré ;

(b) on définit encore la **loi de W. WEIBULL** selon :

$$(8)\quad h(z) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(z) \,.\, (r/\beta)\{z/\beta\}^{r-1} \,.\, \exp\{-(z/\beta)^r\}, \quad \forall z \in \mathbf{R},$$

avec $\beta > 0$ et $r \geq 1$.

En particulier, si r = 1, on obtient la **loi exponentielle** négative.

Les deux premiers moments s'écrivent ici :

$$(9)\quad \begin{cases} E\,\zeta = \beta \,.\, \Gamma\{(r+1)/r\}, \\ V\,\zeta = \beta^2 \,.\, \{\Gamma((r+2)/r) - \Gamma^2((r+1)/r)\}\ ; \end{cases}$$

(c) enfin, on définit aussi la **loi de W. WEIBULL** selon :

$$(10)\quad F(x) = \mathbf{1}_{[a, +\infty[}(x) \,.\, \{1 - \exp\{-((x-\alpha)/\beta)^a\}, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

avec $\beta > 0$ et $a > 0$.

Des **changements de variables** simples permettent de passer d'une forme précédente à une autre.