

LOI DE WILKS (C6, C7, F5)

(15 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La **loi de WILKS** est une **loi de probabilité** qui généralise la **loi de FISHER-SNEDECOR**. Elle est souvent utilisée en **analyse multidimensionnelle**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $W_1 : \Omega \mapsto M_{N(1)}(\mathbf{R})$ et $W_2 : \Omega \mapsto M_{N(2)}(\mathbf{R})$ deux **matrices** aléatoires indépendantes (cf **indépendance stochastique**), où l'on note $N(i)$ pour désigner N_i ($i = 1, 2$). On suppose que :

$$(1) \quad \mathcal{L}(W_i) = \mathcal{W}_{N_i}(K, \Sigma) \quad (\text{loi de WISHART centrée}), \forall i = 1, 2.$$

On appelle alors **loi de S.S. WILKS** la **loi** de la **va** $\Lambda : \Omega \mapsto [0, 1]$ définie par :

$$(2) \quad \Lambda = |W_2| / |W_1 + W_2|,$$

avec $|A| = \text{Dét } A$.

(ii) Cette loi, intervient souvent dans l'étude des échantillons multidimensionnels (cf **loi d'échantillonnage**, **loi multidimensionnelle**). Elle dépend ainsi du **paramètre** (N_1, N_2, Σ) .

A titre d'exemple, soit $\zeta : \Omega \mapsto \mathbf{R}^L$ un **vecteur aléatoire** de loi $P^\zeta = \mathcal{N}_L(\mu, \Sigma)$ (**loi normale multidimensionnelle**) et de **matrice de corrélation** $\Gamma = C \zeta$. Soit $Z = (Z_1, \dots, Z_N)$ un **échantillon iid** comme une **variable parente** donnée ζ , et soit $R_N = R_N X$ sa matrice des corrélations empiriques (cf **théorique**, **empirique**). On partitionne alors ζ en deux groupes de variables (K variables ξ_k et G variables η_g , avec $K + G = L$) et l'on pose $\zeta = (\xi, \eta)$ conformément à cette partition. Enfin, on partitionne Γ et R_N comme ζ , ie :

$$(3) \quad \begin{aligned} \Gamma &= \begin{pmatrix} \Gamma_{\xi\xi} & \Gamma_{\xi\eta} \\ \Gamma_{\eta\xi} & \Gamma_{\eta\eta} \end{pmatrix} \\ R_N &= \begin{pmatrix} R_{\xi\xi} & R_{\xi\eta} \\ R_{\eta\xi} & R_{\eta\eta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors, pour tester l'**hypothèse statistique** d'absence de corrélation « croisée » :

$$(4) \quad H_0 : \Gamma_{\xi\eta} = 0,$$

une **statistique de test** appropriée est la **statistique de S.S. WILKS**, égale au rapport des **variances généralisées** suivant (cf aussi **rapport des variances**) :

$$(5) \quad \Lambda_N = |R_N| / (|R_{\xi\xi}| \cdot |R_{\eta\eta}|).$$

Si H_0 est vraie, ce rapport suit une loi de WILKS de paramètres K , G , $N-G-1$ et Σ .