LOI DE WISHART (C7, F5)
(16 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **loi de WISHART** est une **loi de probabilité** utilisée en **analyse multidimensionnelle**, lorsque les « **populations** » sous-jacentes sont supposées gaussiennes. Cette loi généralise la **loi du chi-deux**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ un **vecteur aléatoire** de **loi** $P^\xi = \mathcal{N}_K (0, I_K)$ (**loi normale multidimensionnelle** centrée et homoscédastique). On note $X = (X_1 ,..., X_N)$ un **échantillon iid** selon P^ξ.

On dit alors que la **matrice** aléatoire (cf **théorique, empirique**) :

(1) $\quad W = \Sigma_{n=1}^N X_n X_n' = X' X$ $\qquad$ (**covariance** empirique non centrée)

suit une **loi de J. WISHART**, où les colonnes X_n représentent les lignes d'une matrice (encore notée) $X \in M_{NK} (\mathbf{R})$.

Le nombre entier N est parfois appelé le **nombre de degrés de liberté** de cette loi.

La loi de WISHART, ie la loi P^W de W, est parfois notée $\mathcal{W}_N (K, I_K , 0)$, ou $\mathcal{W}_N (K, I_K)$ ou simplement $\mathcal{W}_N (K)$.

(ii) On montre que :

(a) si $\eta : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ est un **vecteur aléatoire** normé (ie si $||\eta|| = 1$), alors $\eta' W \eta \sim \mathcal{X}_N^2$ (**loi du chi-deux**) ;

(b) la **densité** de P^W pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_1 de **R** est de la forme :

(2) $\quad f (w) = \mathbf{1}_{S+} (w) . c_{NK} . |w|^{(N-K-1)/2} . e^{- (1/2) \operatorname{Tr} w}$,

où $S^+ = \{w \in S_K (\mathbf{R}) : w >> 0\}$ désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles qui sont strictement définies positives (cf **matrice définie positive**, **matrice symétrique**), C_{NK} est la **constante** de **normalisation** , Tr est l'opération **trace**, et où l'on suppose que $N > K$;

(c) la **fonction caractéristique** de P^W s'écrit :

(3) $\quad \varphi (A) = (I_K + 2 \pi i A)^{- N / 2}$, $\qquad \forall A \in S_K (\mathbf{R})$,

où $S_K (\mathbf{R})$ est l'**espace vectoriel** des matrices symétriques réelles.

(iii) Plus généralement, si l'on suppose initialement que $\xi \sim \mathcal{N}_K (0, \Sigma)$, le **théorème de FISHER multidimensionnel** affirme que la **dispersion** empirique :

(4) $\quad S_N^2 = N^{-1} . \Sigma_{n=1}^N (X_n - \overline{X}_N)(X_n - \overline{X}_N)'$

vérifie la propriété suivante :

(5) $\quad N . S_N^2 \sim \mathcal{X}_{N-1,K}{}^2 (\Sigma)$

(**loi du chi-deux** à K dimensions et N-1 degrés de liberté).

On appelle alors **loi de J. WISHART**, ou **loi de M.S. BARTLETT - J. WISHART**, la loi de la **va** matricielle $W = S_N^2$.

On montre que sa **fc** s'écrit :

(6) $\quad \varphi (w) = |I_K - 2 \, i \, \Sigma \, w^*|^{-(N-1)/2}$,

avec $w^* = (w_{kl}{}^*)_{(k,l)}$, où $w_{kl}{}^* = \lambda_{kl} . w_{kl}$ est tq $\lambda_{kl} = 1$ si $l = k$ et $\lambda_{kl} = 1/2$ sinon. Autrement dit, $\Lambda = (\lambda_{kl})_{(k,l)} = (1/2) (e_N \, e_N' + I_N)$, où e_N désigne le premier vecteur bissecteur de $\mathbf{R}^N$.

Cette loi est notée $\mathcal{W}_N (K, \Sigma, 0)$ ou simplement $\mathcal{W}_N (K, \Sigma)$.