**LOI DE WISHART NON CENTRALE (C2, C7, F5)**
(14 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **loi de WISHART non centrale** est une généralisation de la **loi de WISHART** et de la **loi du chi-deux non centrale**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $X = (X_1, ..., X_N)$ une **suite** de **vecteurs aléatoires** indépendants $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$. On suppose que $\mathcal{L}(X_n) = \mathcal{N}_K(\mu_n, \Sigma)$ (**loi normale multidimensionnelle** avec même **dispersion** $\Sigma$), $\forall n \in N_N^*$.

On appelle alors **loi de J. WISHART non centrale** la **lp** $P^W$ de la **matrice** aléatoire W définie par :

(1) $\quad W = \Sigma_{n=1}^N X_n X_n' = X' X,$

où les colonnes $X_n$ constituent les lignes d'une matrice aléatoire $X \in M_{NK}(\mathbf{R})$ (mêmes notations).

Cette loi est généralement notée $\mathcal{W}_N(K, \Sigma, \mu)$, où la matrice $\mu = [\mu_1, ..., \mu_N]$ est supposée arrangée dans une matrice de même nom $\mu \in M_{NK}(\mathbf{R})$.

Le nombre entier N est appelé **nombre de degrés de liberté** de la loi.

On dit que $P^W$ est une **loi de WISHART centrale**, ou **loi de WISHART centrée**, ssi $\mu = 0$ : on la note $\mathcal{W}_N(K, \Sigma, 0)$ ou simplement $\mathcal{W}_N(K, \Sigma)$ (cf **loi de WISHART**).

(ii) La loi de WISHART non centrale vérifie les propriétés suivantes :

(a) si l'on pose $\sigma_\eta^2 = h' \Sigma h$, alors :

(2) $\quad Y = X' h \sim \mathcal{N}_K(\mu h, \sigma_\eta^2 I_K), \quad \forall h \in \mathbf{R}^K$ ;

(b) si K = 1, alors $\mathcal{W}_1(K, \sigma^2, 0) = \mathcal{L}(\Sigma \eta)$, où $\eta \sim \mathcal{X}_N^2$ (**loi du chi-deux**) et où $\Sigma = \sigma^2 > 0$ est un scalaire ;

(c) la **densité** de $P^W$ pr à la **mesure de LEBESGUE** n'existe que si $N > K$ ;

(d) si V et W sont deux matrices aléatoires indépendantes tq $V \sim \mathcal{W}_M(K, \Sigma)$ et $W \sim \mathcal{W}_N(K, \Sigma, \mu)$, le **rapport des vraisemblances** s'écrit :

(3) $\quad L = |V| / |V + W|.$

On appelle **statistique de S.S. WILKS** la va scalaire (cf **loi de WILKS**) :

(4) $D = |W| / |V + W|$ ;

(e) soit $W \sim \mathscr{W}_N(K, \Sigma, 0)$. On partitionne W (ainsi que $\Sigma$) selon :

(5) $$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } W_{12} \in M_{K(1)K(2)}(\mathbf{R}) \text{ et } K_1 + K_2 = K,$$

(où K(i) désigne resp $K_i$ , i = 1, 2). Alors, on a :

(6) $$B_{12} = W_{11} - W_{12} W_{22}^{-1} W_{12}' \sim \mathscr{W}_N (K - K_2 , \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22} \Sigma_{12}', 0).$$