LOI DE LA CLASSE S_K (μ, Σ) (N2)
(27 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Les **lois** de la classe S_K (μ, Σ) forment une **famille** du même nom, qui contient des lois usuelles dotées des deux premiers **moments algébriques**.

(i) Soi (Ω, $\mathcal{T}$, P) un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ un **vecteur aléatoire** réel de loi $P^\xi = \xi$ (P) tq $\xi \in L_{\mathbf{R}K}{}^2$ (Ω, $\mathcal{T}$, P) (où **R**K désigne $\mathbf{R}^K$). Soit $\mu \in \mathbf{R}^K$ un vecteur réel et $\Sigma \in S_K$ (**R**) une **matrice symétrique** qui est une **matrice définie positive**. Soit α : $\mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}$ une **fonction numérique** donnée.

On dit que P^ξ appartient à la classe S_K (μ, Σ), et l'on note $P^\xi \in S_K$ (μ, Σ) ou $\xi \in S_K$ (μ, Σ), ssi sa (première) **fonction caractéristique** est de la forme :

(1) $\quad \varphi\,(t) \; = \; \alpha\,(t'\,\Sigma\,t)\,.\,e^{i\,t'\,\mu}$.

(ii) Les lois de cette classe vérifient diverses propriétés :

(a) si $\xi \sim \mathcal{N}_K$ (μ, Σ), alors $P^\xi \in S_K$ (μ, Σ) ;

(b) si f est la **densité** de P^ξ pr à λ_K (**mesure de LEBESGUE** sur $\mathbf{R}^K$), il existe une fonction $\beta : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$ tq :

(2) $\quad f\,(x) \; = \; c_K\,.\,|\Sigma|^{-1/2}\,.\,\beta\,((x - \mu)'\,\Sigma^{-1}\,(x - \mu))$.

De plus :

$(b)_1$ si $\int_{\mathbf{R}+} r^{K-1}\,\beta\,(r^2)\,dr < +\infty$, alors f n'est pas dégénérée dans R_K ;

$(b)_2$ si $\int_{\mathbf{R}+} r^{p\,+\,K\,-1}\,\beta\,(r^2)\,dr < +\infty$, alors f possède des moments jusqu'à l'ordre $p \in \mathbf{N}^*$ donné.

En particulier :

$(b)_{21}$ si $p \geq 1$, alors $E\,\xi = \mu$;

$(b)_{22}$ si $p \geq 2$, alors $V\,\xi = \lambda\,.\,\Sigma$ (où $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ ne dépend pas de (μ, Σ)). Notamment, si $\mu = 0$ et $\Sigma = I_K$ (matrice unité), alors λ est la **variance** commune aux **lois marginales** à 1 dimension de P^ξ. (ie aux lois $P^{\xi(k)} = \xi_k$ (P) = (pr_k x) (P), k = 1 ,..., K) (où les $\xi(k)$ désignent les ξ_k et où pr_k désigne la k-ème projection dans $\mathbf{R}^K$) ;

(c) si $\xi \in S_K$ (μ, Σ) et si $A \in M_{JK}$ (**R**) (avec $J \leq K$ et rg A = J), alors $A \in S_J$ (A μ, A Σ A') (matrices symétriques) ;

(d) si $\xi \in S_K(\mu, \Sigma)$ et si toutes les lois marginales sont gaussiennes, ie si, $\forall \{k_1, ..., k_L\} \subset N_K^*$ et $\forall L \in N_K$, on a :

(3) $(\xi_{k(1)}, ..., \xi_{k(L)})(P) = \mathcal{N}_L(\mu_{k(1),...,k(L)}, \Sigma_{k(1),...,k(L)})$,

(où les k(l) désignent les k_l, $\forall l \in N_L$), alors ξ est gaussienne, avec $\xi \sim \mathcal{N}_K(\mu, \Sigma)$;

(e) si $\xi \in S_K(\mu, \Sigma)$ et si $\Sigma = \Lambda \in D_K(\mathbf{R})$ est une **matrice diagonale**, alors les **variables aléatoires** $\{\xi_1, ..., \xi_K\}$ sont indépendantes ssi $\xi \sim \mathcal{N}_K(\mu, I_K)$ (cf **indépendance**) ;

(f) on suppose que $\xi \in S_K(0, I_K)$, que $P^\xi = f \cdot \lambda_K$ (ie admet une densité f pr à λ_K) et l'on décompose ξ selon (vecteur colonne) $\xi = (\xi^1 /// \xi^2)$, avec $\xi^1 : \Omega \mapsto \mathbf{R}^{K(1)}$ et $\xi^2 : \Omega \mapsto \mathbf{R}^{K(2)}$, ainsi que $K_1 + K_2 = K$ (où /// désigne un saut de ligne matriciel et K(i) désigne K_i, i = 1, 2). On établit alors les deux propriétés suivantes :

(4) $\rho^2 = ||\xi^1||^2 / ||\xi||^2 \sim \beta(K_1 / 2, K_2 / 2)$ (**loi beta**) ;

(5) $\rho^2 = (K_2 / K_1) \cdot (||\xi^1||^2 / ||\xi^2||^2) \sim \mathcal{F}(K_1, K_2)$ (**loi de FISHER-SNEDECOR**).