LOI DES GRANDS NOMBRES DANS L^2 (E1)

Cette version de **loi des grands nombres** implique l'intégrabilité quadratique.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une **suite** de **va** $X_n \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^2 (\Omega, \mathcal{T}, P)$. On pose $\overline{X}_N = N^{-1} \Sigma_{n=1}^N X_n$ (**moyenne empirique**) et l'on suppose que X est non corrélée, ie (cf **processus sans corrélation**) : $\beta \neq \alpha \Rightarrow C(X_\alpha, X_\beta) = 0$, ou encore $C(X_\alpha, X_\beta) = 0$ ssi $\beta \neq \alpha$, ie ssi $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{N}^*)_{\neq}^2$.

La lois des grands nombres dans L^2 peut se décliner selon plusieurs versions.

(a) **première version**. Si X est tq :

$$(1) \quad \begin{aligned} E X_n &= \mu, \\ V X_n &= \sigma^2, \end{aligned} \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

alors :

$$(2) \quad \overline{X}_N \to^{m.q.} \mu$$

(**convergence en moyenne quadratique**) ;

(b) **deuxième version**. Si $E X_n = \mu$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, et si les **variances** des X_n sont uniformément bornées (ie s'il existe $K > 0$ tq $V X_n \leq K < +\infty$), alors (2) est encore vérifiée. On a, de plus, la loi **loi forte des grands nombres** : $\overline{X}_N \to^{P\text{-p.s.}} \mu$;

(c) **troisième version**. Si $\mu \in \mathbf{R}$ est un scalaire donné, alors les deux propriétés suivante :

$$(3) \quad \begin{aligned} &\lim_{N \to +\infty} N^{-1} \Sigma_{n=1}^N E X_n = \mu, \\ &\lim_{N \to +\infty} N^{-2} \Sigma_{n=1}^N V X_n = 0, \end{aligned}$$

équivalent à la propriété (2).