LOI DU CHI-DEUX, LOI DU $\mathscr{X}^2$ (C6, C7, F5, J, L, M)
(14 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **loi du Chi-deux** est une **loi de probabilité** qui intervient souvent en **Statistique** : **loi d'échantillonnage**, **théorie des sondages**, **modèle de régression**. Elle est souvent liée à des propriétés du second ordre : variables de carré intégrable, **variabilité** ou **variance** (cf **forme quadratique**).

(i) Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^n$ un **vecteur aléatoire** réel de **loi** $P^\xi = \mathscr{N}_n(0, I_n)$ (**loi normale multidimensionnelle** « normalisée »).

On appelle **loi du chi-deux**, ou **loi du** $\mathscr{X}^2$ (ou encore **loi du** $\mathbf{X}^2$ ou **loi du** Ξ^2), ou **loi de K. PEARSON**, à n **degrés de liberté** la **lp** de la **va** $\eta : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$ définie selon :

(1) $\quad \eta = \xi ' \xi = ||\xi||^2 = \Sigma_{i=1}^n \xi_i^2.$

La variable η est appelée **variable du « chi-deux »** (lettre de l'alphabet grec) et on la note aussi $\mathscr{X}^2$, ou $\mathbf{X}^2$ ou encore Ξ^2. Elle est donc de dimension 2 pr à l'**unité de mesure** commune aux ξ_i ($i \in N_n$*).

La loi P^η de η est généralement notée $\mathscr{X}_n^2$ ou $\mathscr{X}^2$ (n) : c'est ainsi la loi de la somme des carrés de va normales centrées réduites et indépendantes entre elles.

(ii) Elle vérifie les propriétés suivantes :

(a) si $Q \in O_n(\mathbf{R})$ est une **matrice orthogonale**, alors (invariance par transformation orthogonale) :

(2) $\quad P^\eta = \mathscr{X}_n^2 \Leftrightarrow P^{Q\eta} = \mathscr{X}_n^2 \qquad$ (ou encore $\mathscr{L}(\eta) = \mathscr{X}_n^2 \Leftrightarrow \mathscr{L}(^{Q\eta}) = \mathscr{X}_n^2$) ;

(b) la **densité** de P^η pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_1 s'écrit :

(3) $\quad f(y) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(y) \,.\, (n / 2) \,.\, V_n \,.\, (2\pi)^{-n/2} e^{-y/2} y^{(n/2)-1}, \qquad \forall y \in \mathbf{R},$

où :

$$V_n = \pi^{n/2} / \{(n / 2) \,.\, \Gamma(n / 2)\}$$

est le **volume** de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ (cf **boule d'un espace métrique**).

Cette densité s'écrit donc aussi :

(3)' $\quad f(y) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(y) \,.\, \{2^{-n/2} / \Gamma(n / 2)\} e^{-y/2} y^{(n/2)-1}, \qquad \forall y \in \mathbf{R}$;

(c) si γ_1 ,..., γ_n est une **suite iid** selon la **loi gamma** $\boldsymbol{\gamma}_{1/2}$ (0, 2), ie si $\gamma_i \sim \boldsymbol{\gamma}_{1/2}$ (0, 2) ($\forall$ i $\in$ N_n*), alors :

(4) $\eta = \Sigma_{i=1}^{n} \gamma_i \sim \mathscr{X}_n^2 = \boldsymbol{\gamma}_{n/2}(0, 2)$;

(d) si $\eta \sim \mathscr{X}_n^2$, alors E η = n et V η = 2 n (premiers **moments algébriques**) ;

(e) si $\eta \sim \mathscr{X}_n^2$, alors, en posant $\zeta = (\eta - E\,\eta) / (V\,\eta)^{1/2} = (\eta - n) / (2\,n)^{1/2}$, on établit la **convergence légale** :

(5) $\mathscr{L}\{\zeta - (2\,n - 1)^{1/2}\} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mathscr{N}(0,1)$;

(f) si $\eta \sim \mathscr{X}_n^2$, alors :

(6) $\eta / n \rightarrow^{m.q.} 1$;

(g) si $\eta \sim \mathscr{X}_n^2$, alors :

(7) $\mathscr{L}\{(2\,\eta)^{1/2} - (2\,n - 1)^{1/2}\} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mathscr{N}(0,1)$.