LOI DU CHI-DEUX MULTIDIMENSIONNELLE (C6, F5, J, L, M)
(15 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ un **vecteur aléatoire** de **loi** $P^\xi = \mathcal{N}_K(0, \Sigma)$ (**loi normale multidimensionnelle** centrée), où $\Sigma \in R_K(\mathbf{R})$ est une **matrice régulière**, et $X = (X_1, ..., X_N)$ un **échantillon iid** selon P^ξ (avec $N \geq K$).

On appelle **loi du chi-deux multidimensionnelle**, ou **loi du chi-deux K-dimensionnelle**, ou encore **loi du chi-deux à K dimensions**, à N **degrés de liberté** la loi P^{X} de la **matrice** aléatoire (ou **matrice stochastique**) X définie par :

(1) $\quad \mathrm{X} = \Sigma_n X_n X_n' = X X' : \Omega \mapsto M_K(\mathbf{R}),$

où les colonnes X_n sont arrangées en lignes pour former une matrice, encore notée $X \in M_{NK}(\mathbf{R})$.

Cette loi P^{X} est généralement notée $\mathcal{X}_{NK}^2(\Sigma)$ ou $\mathcal{X}_N^2(K, \Sigma)$. Souvent, $\Sigma = I_K$.

(ii) La loi $\mathcal{X}_{NK}^2(\Sigma)$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) comme toute **matrice symétrique**, X ne comporte que K(K+1)/2 éléments (ie va) distinct(e)s ;

(b) la propriété de **convolution** :

(2) $\quad \{\mathcal{X}_{1K}^2(\Sigma)\}^{\otimes N} = \mathcal{X}_{NK}^2(\Sigma)$

entraîne une **fonction caractéristique** de la forme suivante :

(3) $\quad \varphi(t) = \{\text{Dét}(I_K - 2\, i\, \Sigma\, t^*)\}^{-N/2}, \quad \forall\, t \in \mathbf{R}^K,$

où $t^* = (t^*_{kl})_{(k,l)}$, $t_{kl}^* = \lambda_{kl} \,.\, t_{kl}$ et $\lambda_{kl} = 1$ si $l = k$ et $\lambda_{kl} = 1 / 2$ sinon. En effet, $(\varphi(t))^{1/N}$ n'est autre que la fc de la loi $\mathcal{X}_{1K}^2(\Sigma)$;

(c) si $\mathrm{X} \sim \mathcal{X}_{MK}^2(\Sigma)$ et $\Psi \sim \mathcal{X}_{NK}^2(\Sigma)$ sont deux matrices aléatoires indépendantes, on établit alors (par **convolution des lois**) que :

(4) $\quad \mathrm{X} + \Psi \sim \mathcal{X}_{M+N,\, K}^2(\Sigma)$;

(d) si $A \in M_K(\mathbf{R})$ est une matrice quelconque (régulière ou non), alors :

(5) $\quad \mathrm{X} \sim \mathcal{X}_{NK}^2(\Sigma) \Leftrightarrow \mathcal{L}(A\, \mathrm{X}\, A') = \mathcal{X}_{NK}^2(A\, \Sigma\, A').$