**LOI ÉTROITE DES GRANDS NOMBRES (E1)**
(22 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La notion de **convergence étroite** permet d'établir une **loi des grands nombres** particulière, parfois dite « au sens étroit ».

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une **suite iid** de **vecteurs aléatoires** réels, distribuée selon la **loi** $P^\xi$ d'une **variable parente** $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ et $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}K}{}^2 (\Omega, \mathcal{T}, P)$.

La **loi des étroite grands nombres** se traduit par la convergence étroite suivante :

(1) $$\mathcal{L}\,\{N^{-1/2} (T_N - E\,T_N)\} \rightarrow^{ét.}{}_{N \to +\infty} \mathcal{N}_K (0, V\,\xi),$$

(**loi normale multidimensionnelle** centrée), où $T_N = \Sigma_{n=1}{}^N X_n$ et $V\,\xi$ est la **matrice de covariance** commune aux $X_n$ .

(ii) Dans certains cas, la loi des grands nombres vaut encore lorsque la **lp** qui génère X est une loi sans **moments**. Ainsi, dans le cas d'une **promenade aléatoire** symétrique $T = (T_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ , avec $T_N = \Sigma_{n=1}{}^N X_n$ et $K = 1$, on établit que la **probabilité** que le n-ième retour à l'origine ait lieu à l'instant n s'écrit (cf **état de retour**) :

(2) $$P_{n,N-n} = \begin{cases} \{n / (N - n)\} \,.\, C_{N-n}{}^{N/2} \,.\, 2^{-(N-n)} & \text{si } N / 2 \in \{0, 1,..., N-n\}, \\ 0 \text{ sinon,} & \end{cases}$$

pour tout $n \leq N$, où $C_m{}^n$ désigne un coefficient binômial.

Cette loi est aussi celle de la va $T_N$ .

On montre, $\forall\, x \in \mathbf{R}_+$, la **convergence ponctuelle** (**convergence simple**) :

(3) $$P\,(N^{-2} \,.\, T_N < x) \rightarrow_{N \to +\infty} 2 \,.\, \{1 - \Phi\,(x^{-1/2})\}, \quad \forall\, x \in \mathbf{R},$$

où $\Phi$ est la **fr** de la **loi normale** $\mathcal{N}(0, 1)$.

Autrement dit, la **moyenne empirique** $\bar{X}_N = T_N / N$ croît en probabilité avec N.