LOI EXPONENTIELLE (C7)
(25 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **loi exponentielle** est une **lp** d'usage commode (cf aussi **famille exponentielle**). Cette expression recouvre deux définitions courantes.

(i) la **loi exponentielle (négative)** est la **loi** d'une **vars** dont la **fr** est de la forme :

(1) $F(x) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(x) \cdot (1 - e^{-x/\beta}), \qquad \forall x \in \mathbf{R},$

où $\beta > 0$ est un **paramètre d'échelle**. et $\mathbf{1}(A) = \mathbf{1}_A$ la **fonction indicatrice** d'une partie A.

Sa **densité** pr à la **mesure de LEBESGUE** est donc de la forme :

(2) $f(x) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(x) \cdot \beta^{-1} e^{-x/\beta}, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$

Il s'agit donc d'une **loi gamma** particulière, ie de la **loi** $\gamma_1(0, \beta)$.

On établit que, quelle que soit la va $\xi \sim \gamma_1(0, \beta)$:

(3) $E\,\xi = V\,\xi = \beta.$

La loi exponentielle est parfois donnée comme $\gamma_1(0, 1/\lambda)$, avec $\beta = \lambda^{-1}$.

(ii) On appelle parfois **loi exponentielle généralisée**, ou **loi de P.S. de LAPLACE généralisée**, toute une dont la densité pr à la mesure de LEBESGUE est de la forme :

(4) $f(x) = 2^{-1} \cdot \{\Gamma(1 + p^{-1})\}^{-1} \cdot \exp(-|x|^p), \qquad \forall x \in \mathbf{R},$

où $p > 0$ est un **paramètre** réel et Γ désigne la **fonction Gamma**.

On obtient, en particulier :

(a) la (première) **loi de LAPLACE** (cf **lois de LAPLACE**) avec p = 1 ;

(b) la (seconde) loi de LAPLACE (ou **loi normale**) avec p = 2 ;

(c) la **loi uniforme** avec $p = +\infty$.

La famille des lois indexée par $p \in \mathbf{R}_+^*$ est souvent associée à un **modèle de régression** pour en définir un estimateur de moindre norme dans l^p (cf **méthode de moindre norme**, **valeur typique de FRÉCHET**).

Lorsque la va ξ considérée est un **vecteur aléatoire** (ie une va à valeurs dans $\mathbf{R}^K$), la notion se généralise en remplaçant dans (4) la **valeur absolue** $|.|$ par la **norme** euclidienne $||.||$ de $\mathbf{R}^K$ (cf **espace euclidien**) et en redéfinissant la **constante** de **normalisation**.