

LOI GAMMA (LOI γ) (C7)

(22 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **loi gamma**, ou **loi γ** , est une **loi de probabilité** qui est à l'origine de plusieurs lois usuelles en **Statistique** : **loi du chi-deux**, **loi de STUDENT**, **loi de FISHER**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de **loi** P^ξ .

On dit que P^ξ est une **loi gamma**, ou une **loi de type III de K. PEARSON**, de paramètre $v \in \mathbf{R}_+^*$ ssi sa **densité** pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_1 est de la forme :

$$(1) \quad f(x) = \mathbf{1}_{(\mathbf{R}_+)}(x) \cdot \{\Gamma(v)\}^{-1} e^{-x} x^{v-1}, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

où $v \mapsto \Gamma(v)$ est la **fonction Gamma**. et $\mathbf{1}(A)$ la **fonction indicatrice** d'une partie A de $\mathbf{R}$.

P^ξ est souvent notée $\gamma_v(0, 1)$ (**loi gamma « centrée-réduite »**) ou simplement γ_v .

(ii) Elle vérifie les propriétés suivantes :

(a) deux premiers **moments algébriques** : $E \xi = V \xi = v$;

(b) **moments algébriques** simples : $\mu_j = E \xi^j = v(v-1) \dots (v+j-1)$, $\forall j \in \mathbf{N}$;

(c) **mode** :

$$(2) \quad S \xi = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in]0, 1[; \\ v - 1 & \text{si } v \geq 1 ; \end{cases}$$

(d) coefficients de FISHER : $\gamma_1 = 2 v^{-1/2}$, et $\gamma_2 = 6 v^{-1}$ (cf **coefficient d'asymétrie**, **coefficient d'aplatissement**). Cette loi asymétrique (cf **asymétrie**) vérifie : $S \xi - E \xi = 3 \cdot (Q_{1/2} \xi - E \xi)$;

(e) **fonction caractéristique** et **cumulants** :

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi(t) &= (1 - it)^{-v}, \quad \forall t \in \mathbf{R} ; \\ K_j &= v(j-1)!, \quad \forall j \in \mathbf{N}^* ; \end{aligned}$$

(f) par **convolution**, on montre que $\{\gamma_v(0,1)\}^{\otimes N} = \gamma_{Nv}(0, 1)$;

(g) si $\xi \sim \gamma_v(0, 1)$, on établit la **convergence en loi** :

$$(4) \quad \mathcal{L}\{(\xi - v) / v^{1/2}\} \rightarrow_{v \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, 1) \text{ (loi normale).}$$

Plus généralement, si $\xi \sim \gamma_v(0, c^{-1})$, avec $c > 0$, on obtient :

$$(5) \quad \mathcal{L}\{(\xi - E \xi) / \sigma\} \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, 1),$$

avec $\sigma^2 = V \xi$.

(iii) Si l'on effectue un **changement de variable aléatoire** (affine) :

$$(6) \quad \eta = a + b \xi, \quad \text{avec } b > 0,$$

la loi de la va η est notée $\gamma_v(a, b)$ (loi gamma générale à trois **paramètres**).

Les propriétés de $\gamma_v(a, b)$ se déduisent de $\gamma_v(0, 1)$, notamment :

(a) $E \eta = a + b v$ et $V \eta = b^2 v$ (deux premiers moments algébriques) ;

(b) par convolution, $*_{i=1}^p \gamma_{v_i}(a_i, b) = \gamma_v(a, b)$, avec $v = \sum_{i=1}^p v_i$ et $a = \sum_{i=1}^p a_i$.

(iv) On appelle parfois **loi gamma** (de paramètres $v \in \mathbf{R}_+^*$ et $c > 0$) la loi $\gamma_v(0, c^{-1})$ ou encore la loi $\gamma_v(0, c)$.

La loi $\gamma_1(0, c^{-1})$ n'est autre que la **loi exponentielle** (de paramètre c) .