LOI GAMMA NON CENTRALE (C7)
(07 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $(\xi, \eta) : \Omega \mapsto \mathbf{R}^2$ un **couple aléatoire** réel tq la **loi conditionnelle** $P^\xi (. / \eta)$ de ξ sachant η est une **loi gamma** $\gamma_{\nu+\eta} (0, c^{-1})$ (avec $\nu > 0$ et $c > 0$) et que la **loi propre** (ie la **loi marginale** ou « inconditionnelle ») de η est une **loi de POISSON** $\mathcal{P}(\lambda)$.

On dit alors que la loi propre P^ξ de ξ est une **loi gamma non centrale** : on la note $\gamma_\nu (0, c^{-1}, \lambda)$.

En particulier, si $\lambda = 0$, alors $\eta = 0$ (P-p.s.) et P^ξ se réduit à la **loi gamma** ordinaire, ie $\gamma_\nu (0, c^{-1})$.

(ii) La loi gamma non centrale vérifie les propriétés suivantes :

(a) **densité** (pr à λ_1) :

(1) $$f(x) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(x) \,.\, e^{-\lambda} c^\nu e^{-cx} x^{\nu-1} \,.\, \Sigma_{p \in \mathbf{N}} \{p\,!\,.\,\Gamma(\nu + p)\}^{-1} (\lambda c x)^p ;$$

où $\mathbf{1}(R)$ désigne l'**indicatrice** d'une **partie** R de $\mathbf{R}$ et Γ la **fonction Gamma**.

(b) deux premiers **moments algébriques** :

(2) $$E\,\xi = (\nu + \lambda) / c, \quad V\,\xi = (\nu + 2\lambda) / c^2 ;$$

(c) si $\varepsilon \sim \mathcal{N}_K (\mu, \sigma^2 \,.\, I_K)$ (**loi normale multidimensionnelle**) (cf **homoscédasticité**), alors la va :

(3) $$\gamma = ||\varepsilon||^2 = \Sigma_{k=1}^K \varepsilon_k^2$$

suit la **loi du chi-deux non centrale** $\gamma_{K/2} \{0, (2\sigma^2)^{-1}, (2\sigma^2)^{-1} \,.\, ||\mu||^2\}$.

En particulier, si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, alors $\gamma \sim \gamma_{K/2} (0, 1/2, 0) = \gamma_{K/2} (0, 1/2) = \mathcal{X}_n^2$ (**loi du chi-deux** ordinaire, avec $n = K / 2$).