LOI INFINIMENT DIVISIBLE (E3)
(09 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **propriété d'infinie divisibilité** (B. de FINETTI) est une propriété importante pour une **loi de probabilité**, notamment dans le cadre du **problème de la limite centrale**. En effet, une **loi infiniment divisible (id)** est une **loi stable** par **convolution** réitérée : c'est la loi d'une **va** égale à la somme d'un nombre arbitrairement grand de va indépendantes (cf **suite indépendante**). Ces variables sont de plus en plus « négligeables », chacune d'elles se « rapprochant » d'une **variable presque certaine**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ un **vecteur aléatoire** dont la **loi** est notée P^ξ.

On dit que P^ξ est une **loi infiniment divisible**, ou une **loi indéfiniment divisible**, ou encore une **loi infiniment décomposable**, ssi, $\forall$ N $\in \mathbf{N}^*$, il existe une **suite iid** finie $(X_{N1}, ..., X_{NN})$ constituée de vecteurs aléatoires tq (cf **produit de convolution**) :

(1) $\quad P^\xi = \mathcal{L}(S_N) = *_{n=1}^N \mathcal{L}(X_{Nn}),\qquad$ avec $S_N = \Sigma_{n=1}^N X_{Nn}$,

où l'on note $\mathcal{L}(X_{Nn})$ la loi de X_{Nn} (n = 1 ,..., N) et $\mathcal{L}(S_N)$ celle de S_N .

Alors :

(a) si φ désigne la **fonction caractéristique** associée à P^ξ et $\varphi_{Nn} = \varphi_N$ la **fc** commune aux lois $\mathcal{L}(X_{Nn})$ (n $\in \mathbf{N}^*$), on dit que φ est une **fonction caractéristique infiniment divisible** ssi (élévation potentielle) :

(2) $\quad \varphi = (\varphi_N)^N, \quad \forall N \in \mathbf{N}^*$;

(b) si F désigne la **fonction de répartition** associée à P^ξ et $F_{Nn} = F_N$ la **fr** commune aux lois $P^{X(Nn)}$ (où X(Nn) désigne X_{Nn}), on dit que F est une **fonction de répartition infiniment divisible** ssi :

(3) $\quad F = (F_N)^{*N}$ (N-ième puissance de convolution de F_N), $\qquad \forall N \in \mathbf{N}^*$;

(c) si f désigne la **densité** de P^ξ pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_1 et f_N la densité commune aux lois $\mathcal{L}(X_{Nn})$, on dit que f est une **densité infiniment divisible** ssi (N-ième puissance de convolution de f_N) :

(4) $\quad f = (f_N)^{*N}$ (N-ième puissance de convolution de f_N), $\qquad \forall N \in \mathbf{N}^*$.

(ii) Plus généralement, pour définir une **« divisibilité infinie »**, il n'est pas nécessaire de supposer que les variables de décomposition X_{Nn} constituent une **suite équidistribuée**. En effet, soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ un vecteur aléatoire de loi P^ξ, dont la fc (resp la fr, resp la densité) associée est notée φ

(resp F, resp f). On dit que P^{ξ} (resp φ, resp F, resp f) est une **loi de probabilité infiniment divisible** (resp une **fc infiniment divisible**, une **fr infiniment divisible**, une **densité infiniment divisible**) ssi, $\forall$ N $\in$ **N***, il existe une suite finie (X_{N1} ,..., X_{NN}) de vecteurs aléatoires indépendants, de lois respectives $\mathscr{L}$ (X_{Nn}) (resp de fc respectives φ_{Nn} , resp de fr respectives F_{Nn} , resp de densités respectives f_{Nn}), $\forall$ n $\in$ N_N*, tq :

(5) $P^{\xi} = \mathscr{L}(X_{N1}) * ... * \mathscr{L}(X_{NN})$ (produit de convolution)

(6) (resp $\varphi = \Pi_{n=1}^{N} \varphi_{Nn}$) (produit ordinaire des fonctions)

(7) (resp $F = *_{n=1}^{N} F_{Nn}$) (produit de convolution)

(8) (resp $f = *_{n=1}^{N} f_{Nn}$) (produit de convolution).

Autrement dit, la va ξ peut s'exprimer comme somme de N va indépendantes, et ce $\forall$ N $\in$ **N***. Lorsqu'il n'y a pas équidistribution des variables de la décomposition, on parle aussi d'**infinie divisibilité au sens faible**.

(iii) A titre d'exemples, δ_a (**loi de DIRAC** au point a $\in$ $\mathbf{R}^K$), $\mathscr{N}_K$ (μ, Σ) (**loi normale multidimensionnelle**) ou, lorsque K = 1, $\mathscr{P}(\lambda)$ (**loi de POISSON**) et $\mathscr{C}(\alpha, \beta)$ (**loi de CAUCHY**) sont des lp infiniment divisibles.

(iv) On établit les propriétés suivantes :

(a) dans (2), on a $\lim_N \varphi_N = 1$ (fc d'une **variable presque certaine**) ;

(b) les lois id sont stables pour le produit de convolution ;

(c) une fc est id ssi elle est limite (simple) de produits de fc de type poissonnien φ_N , ie (avec K = 1) :

(9) $\mathrm{Log}\, \varphi_N (t) = \Sigma_{n=1}^{N} (i\, t\, a_{Nn} + \lambda_{Nn} \{\exp (i\, t\, b_{Nn}) - 1\})$ (cf **loi de POISSON**) ;

(d) si $(F_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de fr id et si $\lim_N F_N = F_{\infty}$ (P-p.s.) est une fr, alors F_{∞} est id ;

(e) si F_1 et F_2 sont des fr id, leur produit de convolution $F_1 * F_2$ est une fr id ;

(f) lorsque K = 1, si P^{ξ} est id, sa fc φ ne s'annule jamais (ie $\varphi (t) \neq 0$, $\forall$ t $\in$ **R**). De plus, on établit les deux propriétés « canoniques » suivantes :

(f_1) P^ξ est id ssi il existe un scalaire $\mu \in \mathbf{R}$ et une fr (au sens de fonction réelle non décroissante et bornée sur **R**) G tq la seconde **fc** ψ = Log φ de P^ξ admette une **représentation de P.P. LÉVY**, ou **représentation de A.Y. KHINTCHINE - P.P. LÉVY**, ie une représentation de la forme (cf **représentation de LÉVY**) :

(10) $\quad \psi(t) = i\,\mu\,t + \int_{\mathbf{R}} \{e^{itu} - 1 - (1 + u^2)^{-1}\, i\,t\,u\} \,.\, u^{-2} \,.\, (1 + u^2) \,.\, dG(u).$

La représentation (10) s'écrit, plus précisément :

(11) $\quad \psi(t) = i\,\mu\,t + \int_{\mathbf{R}} \Psi(t, u)\, dG(u), \qquad \forall\, t \in \mathbf{R},$

avec :

$$\Psi(t, u) = \begin{cases} \{e^{itu} - 1 - (1 + u^2)^{-1}\, i\,t\,u\} \,.\, u^{-2} \,.\, (1 + u^2), & \text{si } u \neq 0, \\ -\,t^2 / 2, & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

Cette représentation (11) est unique. Dans l'expression (10) de ψ, l'**intégrale** est une intégrale généralisée (qui admet donc un intégrande tendant vers exp $(-t^2) / 2$ lorsque $u \to 0$). Si G est une **fonction de répartition normalisée** (au sens où G $(-\infty)$ = 0+ et où G est continue à droite), alors μ est unique et G est du-unique.

G est appelée **fonction de LÉVY**, ou **fonction de KHINTCHINE-LÉVY**, de P^ξ (ou de sa fr F), et μ est appelée **constante de centrage** (cf **centrage**).

Si U est la **va** associée à G, alors $E\,U < \infty \Leftrightarrow E\,\xi < \infty$. De plus, $E\,\xi = \mu + E\,U$;

(f_2) P^ξ est id ssi il existe un scalaire $\mu \in \mathbf{R}$, un scalaire $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$, une fonction A : $]-\infty, 0[\mapsto \mathbf{R}$ monotone non décroissante et une fonction B : $]0, +\infty[\mapsto \mathbf{R}$ monotone non décroissante tq les deux propriétés suivantes soient vraies :

$$(12)\quad \begin{cases} \int_{[-a,\,0]} u^2\, dA(u) + \int_{[0,\,a]} u^2\, dB(u) < +\infty, \qquad \forall\, a > 0, \\ \psi(t) = \text{Log}\,\varphi(t) = i\,\mu\,t - (1/2)\,\sigma\,t^2 + \int_{\mathbf{R}-} \Phi(t, u)\, dA(u) + \int_{\mathbf{R}+} \Phi(t, u)\, dB(u), \end{cases}$$

avec $\Phi(t, u) = e^{itu} - 1 - (1 + u^2)^{-1}\, i\,t\,u$;

(g) si $(\mathscr{L}_\nu(\xi_\nu))_{\nu \in \mathbf{N}}$ est une suite de lois id, alors st. lim $\mathscr{L}_\nu(\xi_\nu)$ est aussi id (où st. indique une limite stochastique) (cf **convergence stochastique**) ;

(h) si $p > 0$, la fr F associée à P^ξ admet un **moment absolu** (resp un **moment exponentiel**) d'ordre p ssi la fonction de LÉVY définie en (10) ou (11) admet un **moment absolu** (resp un **moment exponentiel**) d'ordre p (**propriété de S.J. WOLFE**) ;

(i) **théorème fondamental des lois infiniment divisibles**. Soit $h = (h_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ une suite sur **N*** tq $\lim_N h_N = +\infty$, $c = (c_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite réelle et Y_{Nn} (avec $n = 1,..., h_N$) une suite de va indépendantes. On montre que, si les Y_{Nn} sont des **variables infinitésimales** et s'il existe deux suites h et c tq la fr G_N de la va $Y_N = \Sigma_{n=1}^{h(N)} Y_{Nn} c_n$ tende (λ_1-p.p.) vers une fr G_∞ , alors G_∞ est une fr id (ou h(N) désigne h_N). Inversement, toute fr id est limite d'une suite de fr G_N (où $N \in \mathbf{N}^*$) associée à la suite des va Y_N définies ci-dessus, où les Y_{Nn} sont supposées indépendantes et infinitésimales ;

(j) **théorème de la limite centrale** pour des variables indépendantes et uniformément asymptotiquement négligeables (cf **théorème de la limite centrale**). Si K = 1 et si $(X_{N1} ,..., X_{NN})_{N \in \mathbf{N}^*}$ est une **suite indépendante** constituée de vars X_{Nn} ($N \in \mathbf{N}^*$) qui sont des **variables uniformément asymptotiquement négligeables**, ie tq (cf aussi **suite négligeable en probabilité**) :

$$(13) \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \max_{n=1}^{N} P([|X_{Nn}| \geq \varepsilon]) \to_{N \to +\infty} 0,$$

alors la famille des lois limites de la suite de lois $(\mathscr{L}(S_N))_{N \in \mathbf{N}^*}$ n'est autre que la famille des lois id, où S_N est définie en (1).

Cette propriété vaut encore pour la suite $(\mathscr{L}(S_N - a_N))_{N \in \mathbf{N}^*}$, où $a = (a_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ est une suite réelle donnée (**paramètres** de **centrage**, ou **paramètres de position**).