LOI NORMALE RÉDUITE (C7)

(15 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La **loi normale réduite** est la version la plus élémentaire de la **loi normale**. Elle ne dépend d'aucun « **paramètre** ».

(i) Soit $\varepsilon \in L_{\mathbf{R}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une **vars** de carré intégrable et de **loi** P^ε .

P^ε est appelée **loi normale réduite**, ou **loi normale centrée-réduite**, ou encore **loi normale standardisée**, ssi sa **densité** pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_1 s'écrit :

$$(1) \quad f(u) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-u^2/2), \quad \forall u \in \mathbf{R}.$$

Cette **lp** est notée $\mathcal{N}_1(0, 1)$, $\mathcal{N}(0, 1)$ ou parfois simplement $\mathcal{N}$. Sa **fr** est généralement notée Φ (ou parfois Π) :

$$(2) \quad \Phi(u) = \int \mathbf{1}_{]-\infty, u]} (2\pi)^{-1/2} \exp\{-t^2/2\} dt, \quad \forall u \in \mathbf{R}.$$

Par suite, on note généralement φ la densité f précédente.

La va ε est dite **variable normale réduite**, ou **variable gaussienne réduite**, ou **variable laplacienne réduite**.

(ii) La loi $\mathcal{N}(0, 1)$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) deux premiers **moments algébriques** : $E \varepsilon = 0$ et $V \varepsilon = 1$;

(b) **fonction caractéristique** :

$$(3) \quad \varphi(t) = \exp\{-t^2/2\}, \quad \forall t \in \mathbf{R} ;$$

(c) on a $\varepsilon \in L_{\mathbf{R}}^p(\Omega, \mathcal{F}, P), \forall p \in [1, +\infty[$.

(iii) La loi normale standard peut aussi être introduite comme **loi limite**, dans le cadre du **théorème de la limite centrale**.

Elle constitue une loi de base à partir de laquelle sont définies (ou construites) de nombreuses autres lp, eg : **loi du chi-deux** (loi d'une somme de carrés de va normales), **loi de CAUCHY** (loi du rapport de deux va normales), etc.

(iv) La terminologie précédente est assez impropre. Cette loi devrait s'appeler **loi normale centrée réduite**, puisqu'elle est un cas particulier de **loi normale** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dans lequel l'**espérance** $\mu = 0$ et la **variance** $\sigma^2 = 1$.

Par suite, c'est la loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$ qui devrait s'appeler loi normale réduite