LOI STABLE (E3)
(09 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **loi stable (P.P. LÉVY)** est une **loi infiniment divisible** particulière jouant un rôle important, notamment dans le cadre du **problème de la limite centrale**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace probabilisable** défini par un **espace de BANACH** réel séparable $\mathcal{X}$ (cf **espace séparable**) doté de sa **tribu borélienne** $\mathcal{B}$, et $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **va** dont la **loi** est P^{ξ}.

On dit que P^{ξ} est (resp ξ possède) une **loi stable** ssi il existe :

(a) une **suite iid** $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ constituée de va analogues à ξ (**variable parente**), avec $\mathcal{L}(X_n) = P^{\xi}$, $\forall$ n $\in$ **N*** ;

(b) une **suite** $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sur $\mathcal{X}$ (ie $a_n \in \mathcal{X}$, $\forall$ n $\in$ **N***) ;

(c) une suite $b = (b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sur **R** (ie $b_n \in \mathbf{R}$, $\forall$ n $\in$ **N***),

ces suites étant tq :

(1) $\mathcal{L}\{(S_N - a_N) / b_N\} = P^{\xi}, \quad \forall N \in \mathbf{N}^*, \quad$ avec $S_N = \Sigma_{n=1}^{N} X_n$.

Il est équivalent de dire qu'il existe deux suites, $b' = (b_n')_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $a' = (a_n')_{n \in \mathbf{N}^*}$, tq :

(2) $\mathcal{L}\{(S_N / b_N') - a_N'\} = P^{\xi}, \quad \forall N \in \mathbf{N}^*$.

On établit que les seules suites $b = (b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ possibles vérifient la propriété suivante :

(3) $b_N = N^{1/\alpha}, \quad$ avec $\alpha \in]0, 2]$.

Le nombre α est appelé **indice de la loi stable**, la suite a est dite **suite de centrage** et la suite b **suite de normalisation**.

On dit encore que P^{ξ} est une **loi stable** ssi :

(4) $\mathcal{L}\{(S_N - a_N) / b_N\} \to P^{\xi}$,

ou encore ssi :

(5) $\mathcal{L}\{S_N / b_N' - a_N'\} \to P^{\xi}$,

la convergence étant entendue au sens d'un **mode de convergence** donné (le plus souvent, la **convergence en loi**).

(ii) L'étude des lois stables porte notamment sur les questions suivantes :

(a) exhibition des suites a et b vérifiant les définitions (1), notamment celles pour lesquelles la **vitesse de convergence** est la plus grande ;

(b) caractérisation des **familles** de lois stables (tq P^ξ) à l'aide de procédés du type précédent. Ainsi, si $\xi \in L_{\mathscr{X}}^2(\Omega,\mathscr{T},P)$, la famille des lois stables est la famille des **lois normales** : dans ce cas, l'équation (4), au sens de la convergence légale, s'appelle **théorème de la limite centrale**. Ainsi, P^ξ est stable ssi elle appartient à la famille des lois qui sont limites de suites « normées » tq $(S_N - a_N) / b_N$ ou $(S_N / b_N') - a_N'$ (cf **variable normée**).

(iii) On appelle aussi **loi stable** tout élément d'une **famille de lois** qui est « fermée » pr à l'opération $*$ de **convolution des lois**. Dans cette définition, par « famille de lois de probabilité » on sous-entend l'expression plus complète de « famille de lp d'un type donné » (ie famille invariante par transformation affine) (cf **type de variable aléatoire**).

On dit alors que P^ξ est une **loi stable** ssi, pour tout couple de va X' et X'' iid selon P^ξ et pour tout couple $(\lambda', \lambda'') \in \mathbf{R}_+^2$, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}_+$ (pouvant éventuellement dépendre de (λ', λ'')) et une va X de loi P^ξ tq :

(6) $\lambda X = \lambda' X' + \lambda'' X'' \sim P^\xi$.

On dit que P^ξ est une **loi quasi-stable** ssi on remplace (6) par :

(7) $\lambda X + \mu = \lambda' X' + \lambda'' X''$, où $\mu \in \mathscr{X}$ et $(\lambda, \lambda', \lambda'') \in \mathbf{R}^3$.

Une loi quasi-stable est donc la loi de la somme d'une **variable presque certaine** et d'une va dont la loi est stable.

(iv) La propriété de **stabilité des lois** entraîne des propriétés corrélatives importantes de leurs **fr** et de leurs **fc**. Ces propriétés sont elles-mêmes souvent présentées comme définitions. Ainsi :

(a) si $\mathscr{X} = \mathbf{R}$ et si F est la fr associée à P^ξ, alors P^ξ est une loi stable (et F une fr stable) ssi, $\forall (\alpha', \alpha'') \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ et $\forall (\beta', \beta'') \in \mathbf{R}^2$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ tq :

(8) $F(\alpha' x + \beta') * F(\alpha'' x + \beta'') = F(\alpha x + \beta), \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Si φ désigne la fc associée à P^ξ, P^ξ est stable (et φ est une fc stable) ssi, $\forall$ $(\alpha', \alpha'') \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, il existe $\alpha > 0$ et $\gamma \in \mathbf{R}$ tq :

(9) $e^{i \gamma t} \varphi (t / \alpha') . \varphi (t / \alpha'') = \varphi (\alpha t)$, $\forall$ $t \in \mathbf{R}$.

Autrement dit, P^ξ est une loi stable ssi, $\forall$ $(\beta', \beta'') \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, il existe $\beta > 0$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tq :

(10) $f \circ h_\beta = d_\alpha . (f \circ h_{\beta'}) . (f \circ h_{\beta''})$,

où $h_\beta : t \mapsto \beta\, t$ est l'homothétie de rapport $\beta > 0$, d_α la fonction complexe $t \mapsto e^{i \alpha t}$ et où les points désignent le produit ordinaire (ie le produit numérique) des fonctions ;

(b) plus généralement, soit $\mathscr{X} = \mathbf{R}^K$, $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ un **vecteur aléatoire** de loi P^ξ à laquelle est associée la fc φ. Alors P^ξ est une loi stable ssi il existe une **suite iid** $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ constituée de **copies** de ξ distribuées selon P^ξ, un scalaire $\beta > 0$ et un vecteur $\alpha \in \mathbf{R}^K$ tq :

(11) $\psi_m (t) . \psi_n (t) = e^{i t' \alpha} \varphi (\beta t)$, $\forall$ $(m, n) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$,

expression dans laquelle ψ_n désigne, $\forall$ $n \in \mathbf{N}^*$, la fc de la va $Y_n = \alpha_n + \beta_n X_n$, ie la fonction $t \mapsto \psi_n (t) = \exp (i\, t'\, \alpha_n)\, \varphi (\beta_n t)$ associée à deux suites arbitraires $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$. Autrement dit, le produit de deux fc de la suite $\psi = (\psi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est encore une fc de cette même suite.

Ceci est donc aussi vrai de tout produit fini de fc de ce type. Par suite, en posant $\beta_n = 1$, $\forall$ $n \in \mathbf{N}^*$:

(12) $\varphi (\beta t) = \exp (- i\, t'\, \alpha) . \{\varphi (t)\}^n = \{\exp (- i\, t'\, \alpha / n) . \varphi (t)\}^n$, $\forall$ $n \in \mathbf{N}^*$.

Ceci montre que, par définition, toute loi stable est une **loi infiniment divisible**. Cette propriété est valable dans le cas général ;

(c) il existe une représentation spécifique (de la fc) d'une **loi stable**. En effet, lorsque $\mathscr{X} = \mathbf{R}$, on dit que φ est la fc d'une loi stable ssi elle peut se mettre sous la forme (cf (12)) :

(13) $\mathrm{Log}\, \varphi (t) = \alpha\, i\, t - \beta\, |t|^p \{1 + i\, \gamma\, (t / |t|) . c (t, p)\}$, $\forall$ $t \in \mathbf{R}$,

avec :

(14) $c (t, p) = \begin{cases} \mathrm{tg}\, (p\, \pi / 2), & \text{si } p \neq 1, \\ (2 / \pi)\, \mathrm{Log}\, |t|, & \text{si } p = 1, \end{cases}$

forme dans laquelle $p \in]0, 2]$ est appelé **exposant caractéristique**, $\gamma \in [-1, +1]$ est un **coefficient d'asymétrie**, $\beta > 0$ un **paramètre d'échelle** et $\alpha \in \mathbf{R}$ un **paramètre de position**.

En particulier, lorsque $p = 2$ et $\gamma = 0$, on obtient la famille des **lois normales** $\mathcal{N}(\alpha, \beta)$. Si $\beta = 0$, on obtient la famille des **lois de DIRAC**.

(v) Enfin, on appelle **caractéristique stable** toute **caractéristique** (fr, fc, **densité**, etc) associée à une loi stable.