LOI UN - ZÉRO DE KOLMOGOROV (E, F, N)
(15 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La **loi un - zéro de KOLMOGOROV** n'est pas d'une **loi de probabilité**, mais une **propriété probabiliste** relative à des suites aléatoires.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de **vecteurs aléatoires** (eg un **processus stochastique**) $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$, supposée indépendante (cf **suite indépendante**). On note $\mathcal{T}_\infty$ la **tribu asymptotique** engendrée par X.

La **loi « un-zéro »**, ou **loi « 1 - 0 »**, ou **loi du tout ou rien**, **de A.N. KOLMOGOROV** se traduit par les deux propriétés suivantes :

(a) la **mesure de probabilité** d'un **événement** asymptotique est soit nulle (évènement presque impossible), soit égale à un (évènement presque certain), ie :

(1) $\quad P(A_\infty) \in \{0, 1\} = N_1, \qquad \forall A_\infty \in \mathcal{T}_\infty$;

(b) toute **variable asymptotique** est dégénérée. En effet, on montre que, si $X_\infty : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ est $\mathcal{T}_\infty$-mesurable, alors :

(2) $\quad P^{X\infty}(B) = P(X_\infty^{-1}(B)) \in \{0, 1\}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^K)$,

où $X\infty$ désigne X_∞ .

Il existe donc une **constante** $c \in \mathbf{R}^K$ tq $X_\infty = c$ (P-p.s.), ou encore $P^{X\infty} = \delta_c$ (**loi de DIRAC** au point c).