

LOIS CONJUGUÉES (C6, G3)

(05 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Il existe plusieurs acceptions de « lois conjuguées ». La **théorie bayésienne** conduit à considérer la « **transformation de BAYES** », qui associe, sous certaines conditions, une **loi a posteriori** à toute **loi a priori** donnée. Ceci conduit à la notion suivante, la plus courante, de **conjugaison des lois**.

(i) Soit $\mathcal{P}^X = (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ une **famille de lois dominée** par une **mesure positive** σ -finie μ , définie sur une **tribu** $\mathcal{B}$. Soit $(\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$ un **espace mesurable** associé à Θ et Π l'ensemble de toutes les probabilités définies sur $\mathcal{B}_\Theta$. On considère, par ailleurs, une famille de **probabilités a priori** $\mathcal{Q}$, définie sur $\mathcal{B}_\Theta$. On suppose que $\Pi \in \Pi$ est une probabilité a priori dominée par une mesure positive σ -finie ν , définie sur $\mathcal{B}_\Theta$, et l'on note $\pi = d\Pi / d\nu$ la **dérivée de NIKODYM-RADON** correspondante.

Le **théorème de BAYES** s'exprime ici selon :

$$(1) \quad q(\theta / x) = f(x, \theta) \pi(\theta) / \int_{\Theta} f(x, \theta) \pi(\theta) d\nu(\theta), \quad \forall (x, \theta) \in \mathcal{X} \times \Theta,$$

avec $\text{eg } \Theta \subset \mathbf{R}^Q$. On note Q^x la probabilité a posteriori associée à la densité $q(\cdot / x)$.

Par suite, la **transformation de T. BAYES** :

$$(2) \quad \beta : \mathcal{Q} \mapsto \Pi$$

est définie, $\forall x \in \mathcal{X}$, par la **correspondance** :

$$(3) \quad \beta(P) = Q^x.$$

On dit que β est une **conjugaison** sur $\mathcal{Q}$ ssi :

$$(4) \quad \text{Im } \beta = \beta(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q}$$

(ie ssi $\mathcal{Q}$ est stable par β).

Donc $\{\Pi \in \mathcal{Q}\} \Rightarrow \{Q^x \in \mathcal{Q}\}$ et l'on dit que Π et Q^x sont des **lois a priori conjuguées**, ou des **probabilités a priori conjuguées**, ssi $\mathcal{Q}$ est une famille de probabilités **paramétrique**, ie ssi π et $q(\cdot / x)$ ont même forme analytique.

(ii) Un intérêt de la notion de conjugaison apparaît lorsque $\mathcal{Q}$ est une **famille stable par conjugaison**, ie lorsque les lois a priori et les lois a posteriori sont des lois de même type, ou de même nature.

A titre d'exemple, on montre que la famille des **lois de DIRICHLET** est conjuguée par rapport à la famille des **lois multinômiales**.