

## LOIS DE MORGAN (A2, B4, B5)

(05 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Les « lois » de MORGAN ne sont ni des lois de probabilité, ni des lois scientifiques, (cf aussi loi), mais des propriétés ensemblistes.

(i) Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable et  $A = (A_i)_{i \in I}$  une famille de parties (mesurables ou non) de  $E$ .

Les lois de A. de MORGAN se résument dans les formules du même nom :

$$(1) \quad \begin{aligned} (\cap_{i \in I} A_i)^c &= \cup_{i \in I} A_i^c && \text{(formule primale),} \\ (\cup_{i \in I} A_i)^c &= \cap_{i \in I} A_i^c && \text{(formule duale),} \end{aligned}$$

dans lesquelles la complémentation se fait pr à  $E$  (cf complémentaire d'une partie).

(ii) En calcul des probabilités et en Statistique,  $(E, \mathcal{A})$  est un espace probabilisable noté  $(\Omega, \mathcal{T})$ , et l'on considère une probabilité  $P$  définie sur  $\mathcal{T}$ .

Alors, la formule suivante (cf équation de POINCARÉ) :

$$(2) \quad P(\cap_{n \in \mathbf{N}} A_n) = 1 - P\{(\cap_{n \in \mathbf{N}} A_n)^c\} = 1 - P(\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n^c),$$

valable pour toute suite  $A = (A_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'éléments (ou événements aléatoires) de  $\mathcal{T}$ , ainsi que l'inégalité de G. BOOLE suivante :

$$(3) \quad P(\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n^c) \leq \prod_{n \in \mathbf{N}} P(A_n^c),$$

conduisent à l'inégalité de BONFERRONI :

$$(4) \quad P(\cap_{n \in \mathbf{N}} A_n) \geq 1 - \sum_{n \in \mathbf{N}} P(A_n^c).$$

Cette inégalité est souvent utilisée :

(a) en théorie de l'estimation (cf estimateur ensembliste) ;

(b) ou en théorie des tests (cf notamment principe de réunion et d'intersection).