LOIS DE PEARSON (C6, C7)
(09 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Les **lois de K. PEARSON** constituent une **famille** de **lois de probabilité** dépendant de quatre **paramètres** et définie par une **équation différentielle** du premier ordre.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de **loi** P^{ξ}.

On dit que P^{ξ} est une **loi (du type) de K. PEARSON** ssi sa **densité** f pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_1 vérifie l'équation différentielle suivante :

(1) $\quad D\, f(x)$ ou $f'(x) = (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)^{-1} (x - \alpha) . f(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}$,

assortie d'une condition limite :

(2) $\quad \exists\, p \in \mathbf{N}$ tq $\lim_{|x| \to +\infty} x^{p+2} f(x) = 0$ (p est appelé **ordre de contact**).

(ii) Certaines propriétés de f peuvent être étudiées directement sur la forme (1). On montre que :

(a) le **mode** de P^{ξ} est $S\, \xi = \alpha$;

(b) les **moments algébriques** non centrés (ie centrés en 0) s'obtiennent à l'aide de l'**équation de récurrence** du second ordre suivante :

(3) $\quad j . \beta_0\, \mu_{j-1} + \{(j + 1) . \beta_1 - \alpha\} . \mu_j + \{(j + 2) . \beta_2 + 1\} . \mu_{j+1} = 0$,

où $j \in \{0, 1,..., p\} = N_p$, compte tenu des conditions initiales $\mu_0 = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, dx = 1$ et $\mu_1 = \mu^*$ (donné).

Le **changement de variable aléatoire** :

(4) $\quad \eta = \xi - \alpha$ (**centrage** pr au **mode**)

conduit à l'équation :

(5) $\quad D \operatorname{Log} g(y) = (b_0 + b_1 y + b_2 y^2)^{-1} . y, \qquad \forall y \in \mathbf{R}$.

(iii) Selon les valeurs des coefficients (b_0, b_1, b_2) du trinôme du second degré figurant dans (5), on peut définir des classes particulières de lois de PEARSON.

Les plus typiques sont les suivantes (en notant, le cas échéant, c une **constante de normalisation** ad hoc) :

(a) **lois de type I** (ou **lois beta** de première espèce, centrées pr au mode) :

(6) $\quad g(y) = \mathbf{1}_{[-a, b]}(y) . \{B(m+1,n+1)\}^{-1} \{a^m b^n / (a + b)^{m+n+1}\} \{1 + (y/a)\}^m \{1 - (y/b)\}^n$;

(b) **lois de type II** (cas particulier de (6) avec n = m et b = a) :

(7) $g(y) = \mathbf{1}_{[-a,a]}(y) . \{a . \mathrm{B}(1/2, m+1)\}^{-1} \{1 - (y^2/a^2)\}^m$, avec $m \geq -1$;

(c) **lois de type III** (ou lois du type de la **loi gamma**) :

(8) $g(y) = \mathbf{1}_{[-a,+\infty[}(y) . \{a\, e\, \Gamma(\alpha)\}^{-1} e^{-y/a} \{1 + (y/a)\}^{\alpha - 1}$, avec $\alpha > 0$, $a > 0$;

(d) **lois de type IV** :

(9) $g(y) = c . \{1 + (y^2/a^2)\}^{-m} . \exp\{- \beta . \mathrm{Arc\,tg}\,(y/a)\}$, avec $m > 1/2$, $\beta > 0$;

(e) **lois de type V** :

(10) $g(y) = c . \mathbf{1}_{[a,+\infty[}(y) . (y - a)^{-\alpha} \exp\{- (y - a)^{-1} \beta\}$, avec $\alpha > 1$, $\beta > 0$;

(f) **lois de type VI** (ou **loi beta** de seconde espèce) :

(11) $g(y) = c . \mathbf{1}_{[a,+\infty[}(y) . y^{-m} (y - a)^n$, avec $m > n+1 > 0$;

(g) **lois de type VII** (ou lois du type de la **loi de STUDENT**) :

(12) $g(y) = \{a . \mathrm{B}(1/2, m - (1/2)\}^{-1} \{1 + (y^2/a^2)\}^{-m}$, avec $m > 0$;

(h) **lois de type VIII** :

(13) $g(y) = c . \mathbf{1}_{[-a,0]}(y) . \{1 + (y/a)\}^{-m}$, avec $m \in [0, 1]$;

(i) **lois de type IX** :

(14) $g(y) = c . \mathbf{1}_{[-a,0]}(y) . \{1 + (y/a)\}^{m}$, avec $m > -1$;

(j) **lois de type X** (ou loi du type de la **loi exponentielle**) :

(15) $g(y) = \mathbf{1}_{[a,+\infty[}(y) . b^{-1} e^{-(y - a)/b}$, avec $b > 0$;

(k) **lois de type XI** (ou lois de type de la **loi de PARETO**) :

(16) $g(y) = c . \mathbf{1}_{[a,+\infty[}(y) . y^{-m}$, avec $m > 0$;

(l) **lois de type XII** (cas particulier du type I) :

(17) $g(y) = \mathbf{1}_{[-a,b]}(y) . \{1 + (y/a)\}^{m} . \{1 - (y/b)\}^{-m}$, avec $|m| > 1$.

Dans ce qui précède, $\mathbf{1}_B$ désigne la **fonction indicatrice** d'une partie $B \subset \mathbf{R}$, B désigne la **fonction Beta**, Γ désigne la **fonction Gamma** et e la base des logarithmes népériens (e # 2,718...).