MATRICE (A3)
(19 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Une **matrice** est un objet mathématique (algèbre linéaire) d'usage courant en **Statistique** (cf **tableau statistique**, **tableau de contingence**), notamment en raison des propriétés linéaires ou bilinéaires qui lui sont associées.

(i) Soit E (resp F) un **espace vectoriel** de dimension finie m (resp n) défini sur un corps **K** et muni d'une **base** $\mathcal{U} = (u_i)_{i=1,...,m}$ (resp d'une base $\mathcal{V} = (v_j)_{j=1,...,n}$). Soit f $\in$ Hom (E, F) une **application linéaire** (**homomorphisme**), qui transforme tout vecteur u_i de E en un vecteur f (u_i) de F. Ce dernier vecteur se décompose (de façon unique) sur la base $\mathcal{V}$ selon :

(1) $f(u_i) = \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$.

On appelle **matrice** associée à f dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ le « tableau » A_f de **format** (m,n), constitué des éléments scalaires $a_{ij} \in$ **K**, et simplement noté A.

On note alors $A = (a_{ij})_{i=1,...,m;j=1,...,n}$ ou simplement $A = (a_{ij})_{ij}$.

On note M_{mn} (**K**) l'ensemble (qui est un espace vectoriel) des matrices de format (m,n) sur **K**.

Si m = n, on note M_n (**K**) l'ensemble des matrices « carrées » sur **K**. Toute matrice carrée $A \in M_n$ (**K**) peut être associée à un **endomorphisme** f $\in$ End (E).

Toute matrice « rectangulaire » $B \in M_{mn}$ (**K**) peut être associée à une forme bilinéaire $b \in \mathcal{B}$ (E x F, **K**) (cf **forme multilinéaire**) et inversement. En effet, si $x = \Sigma_{i=1}^{m} x_i u_i \in E$ et $y = \Sigma_{j=1}^{n} y_j v_j \in F$, on a :

(2) $b(x, y) = \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j=1}^{n} b(u_i, v_j) x_i x_j$,

et il suffit de définir B par ses termes $b_{ij} = b(u_i, v_j) \in$ **K**.

Inversement, si $B \in M_{mn}$ (**K**) est donnée, alors l'application $(x, y) \mapsto x' B y$ est une application bilinéaire.

(ii) Si Dim E = m et Dim F = 1, la (m,1)-matrice $A \in M_{m1}$ (**K**) associée à la forme linéaire f sur E est appelée **matrice unicolonne**, ou **vecteur colonne**, et l'on peut identifier M_{m1} (**K**) avec E.

On note de façon identique la matrice unicolonne A et le vecteur $A \in E$. Autrement dit, si $x \in E$ est un vecteur décomposé sur une base $\mathcal{U}$ de E selon $x = \Sigma_{i=1}^{m} x_i u_i$, on note à l'aide du même symbole x le vecteur colonne :

(3) $(x_1 /// ... /// x_m) \in M_{m1}$ (**K**) $\approx$ E,

où /// dénote un « saut de ligne » et ≈ une **identification** (ie **isomorphisme**) (cf schéma ci-dessous).

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in M_{m1}(\mathbf{K}) \approx E$$

Pour simplifier la typographie, on écrit souvent $x' = (x_1 ,..., x_m)$ ou $x = (x_1 ,..., x_m)'$, le symbole « prime » indiquant l'opération de **transposition matricielle**.

(iii) Plus généralement, une (m,n)-matrice A sur **K** s'écrit aussi sous l'une des formes suivantes :

(a) $[a_1 ,..., a_n]$ (à l'aide des vecteurs colonnes a_j qui la composent) ;

(b) $(A_1$ /// $A_m)$ ou $(A_1$ ::: $A_m)$ (à l'aide des vecteurs lignes A_i qui la composent), où /// aussi bien que ::: dénotent un « saut de ligne » (cf schéma ci-dessous).

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbf{K})$$

On note souvent $a_{ij} = (A)_{ij}$ et $A = (a_{ij})_{(i,\, j)}$.

(iv) On étend parfois les notations même dans la situation où **K** n'est pas un corps mais un **ensemble** quelconque $\mathcal{E}$: on note alors l'ensemble des matrices dont les termes sont à valeurs dans $\mathcal{E}$ par le symbole $M_{mn}(\mathcal{E})$. Ceci est le cas lorsque $\mathcal{E} = N_1 = \{0,1\}$, ou $\mathcal{E} = \mathbf{N}$, ou $\mathcal{E} = \mathbf{Z}$, ou encore $\mathcal{E} = \{- , +\}$, etc.

De telles matrices sont plutôt appelées **tableaux**. En particulier, un **tableau statistique** consiste en l'association :

(a) d'un tableau, élément de $M_{mn}(\mathcal{E})$;

(b) des listes d'**indices** en lignes $N_m^* = \{1 ,..., m\}$ et en colonnes $N_n^* = \{1 ,..., n\}$. A chacune de ces listes est généralement associé un descripteur, ie une **variable qualitative** explicitant la signification de la liste : il s'agit souvent d'un **caractère statistique** ou d'un **codage**.