MATRICE INVERSE CONDITIONNELLE (A3)
(09 / 10 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion générale d'inversion d'une **correspondance** ou d'une **application** (cf **application inverse**) s'applique au cas des applications linéaires, donc à leurs matrices représentatives. Dans le cas de l'inversion conditionnelle, l'inverse n'est généralement pas unique.

On développe les propriétés des inverses conditionnelles car leur algèbre est peu répandue.

(i) Soit E_n et F_m deux espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps **K** (avec Dim E_n = n et Dim F_m = m), $f : E_n \mapsto F_m$ une **application linéaire** et $A \in M_{mn}$ (**K**) sa **matrice** dans des bases données de E_n et F_m .

On dit que :

(a) $f^c : F_m \mapsto E_n$ est une **(application linéaire) inverse conditionnelle**, ou une **c-inverse**, ou un **(homomorphisme) inverse généralisé**, de f ssi :

$(1)_a$ $\quad f \circ f^c \circ f = f.$

On note f^c l'endomorphisme associé à A^c ;

(b) $A^c \in M_{nm}$ (**K**) est une **(matrice) inverse conditionnelle**, ou une **c-inverse**, ou une **(matrice) inverse généralisée**, de A (cf **matrice inverse généralisée**) ssi :

$(1)_b$ $\quad A\, A^c A = A.$

On note souvent aussi A^- et f^- au lieu resp de A^c et f^c.

L'**ensemble** des matrices inverses conditionnelles d'une matrice A est noté $\mathcal{C}(A)$.

(ii) On montre que :

(a) Card $\mathcal{C}(A) \geq 1$;

(b) si $A^c \in \mathcal{C}(A)$, alors $A^c A \in I_n$ (**K**) (**matrice idempotente**) et $A\, A^c \in I_m$ (**K**) ;

(c) rg $A^c \geq$ rg A, $\forall A^c \in \mathcal{C}(A)$;

(d) $A^c \in \mathcal{C}(A) \;\Rightarrow\;$ rg A = rg $(A^c A)$ = rg $(A\, A^c) \leq$ rg A^c ;

(e) si $A \in M_n$ (**K**), alors :

$(e)_1$ $x \in \operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} A' \;\Rightarrow\; x' A^c x$ = constante, $\forall A^c \in \mathcal{C}(A)$;

$(e)_2$ $x \in \text{Im } A$ et $A \in S_n(\mathbf{K}) \Rightarrow x' A^c x$ = constante, $\forall A^c \in \mathcal{C}(A)$;

(f) soit $A \in M_{mn}(\mathbf{K})$, A_1^c et $A_2^c \in \mathcal{C}(A)$ et $x \in \mathbf{K}^m$ tq : $A A_1^c x = x$. Alors, $A A_2^c x = x$;

(g) si $A \in R_n(\mathbf{K})$, alors Card $\mathcal{C}(A) = 1$ et $A^c = A^{-1}$ (**matrice inverse** ordinaire) ;

(h) soit $A = ((A_{11}, O) /// (O, A_{22}))$ une matrice bloc-diagonale (où /// désigne un saut de ligne). Alors $A^c = ((A_{11}^c, O) /// (O, A_{22}^c))$;

(i) si $A \in D_n(\mathbf{K}) \cap (R_n(\mathbf{K}))^c$, alors Card $\mathcal{C}(A) > 1$;

(j) si $A^c \in \mathcal{C}(A)$, alors $(A^c)' \in \mathcal{C}(A')$ (conditionnelles des transposées) ;

(k) $\{P \in R_m(\mathbf{K}), Q \in R_n(\mathbf{K})$ et $A \in M_{mn}(\mathbf{K})\} \Rightarrow (P A Q)^c = Q^{-1} A^c P^{-1}$, $\forall A^c \in \mathcal{C}(A)$;

(l) si $A^c \in \mathcal{C}(A)$, alors $A^c A A^c \in \mathcal{C}(A)$ et rg $(A^c A A^c)$ = rg A. De plus, si l'on pose $B = A^c A A^c$, on a $B A B = B$, ie $A \in \mathcal{C}(B)$.