MATRICE RÉGULIÈRE (A3)
(26 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) On appelle **matrice régulière**, ou **matrice inversible**, toute **matrice** $A \in M_n(\mathbf{K})$ qui admet une inverse B (pour l'opération de multiplication matricielle), ie une matrice B tq :

(1) $\quad A\,B = B\,A = I_n$.

B est appelée **matrice inverse** de A : elle est notée A^{-1}. On la qualifie de **matrice inverse ordinaire**, par distinction avec la notion de **matrice inverse généralisée**.

L'ensemble des matrices régulières sur un corps **K** est noté $R_n(\mathbf{K})$.

(ii) On montre que :

(a) $A \in R_n(\mathbf{K}) \Leftrightarrow \text{Dét}\,A \neq 0$;

(b) si $A \in R_n(\mathbf{K})$, $x \in \mathbf{K}^n$ et $y \in \mathbf{K}^n$, alors :

(2) $\quad \text{Dét}\,(A + x\,y') = (1 + y'\,A^{-1}\,x)\,.\,\text{Dét}\,A$;

(3) $\quad A + x\,y' \in R_n(\mathbf{K}) \Rightarrow (A + x\,y')^{-1} = A^{-1} - \{A^{-1}\,x\,y'\,A^{-1} / (1 + y'\,A^{-1}\,x)\}$;

(c) si $A \in I_n(\mathbf{K})$ (**matrice idempotente**) et si $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{K} \setminus \{0\})^2$, alors :

(4) $$\begin{aligned} B &= \alpha\,A + \beta\,(I_n - A) \in R_n(\mathbf{K}), \\ B^{-1} &= \alpha^{-1}\,A + \beta^{-1}\,(I_n - A). \end{aligned}$$

(iii) Une matrice A qui n'est pas régulière est appelée **matrice singulière**.

(iv) Il existe plusieurs façons de définir l'inverse d'une matrice (non nécessairement carrée). Selon les conditions de définition, plus ou moins restrictives, ces inverses peuvent ne pas être uniques : **matrice inverse généralisée** , **matrice inverse conditionnelle**, de **matrice inverse des moindres carrés**, ou **matrice pseudo-inverse** (inverse de MOORE-PENROSE).