MATRICE STOCHASTIQUE (A3, C1, F1, N2)
(09 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Deux significations peuvent être attribuées à l'expression **matrice stochastique** : soit comme variable aléatoire ou distribution de fréquences, soit comme distribution de probabilités.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**.

On appelle **matrice stochastique**, ou **matrice aléatoire**, toute **variable aléatoire** à valeurs dans un espace de **matrices** définies sur un corps **K** : lorsque **K** = **R**, on parle de **matrice stochastique réelle** ; lorsque **K** = **C**, de **matrice stochastique complexe**. Autrement dit, $M : \Omega \mapsto M_{mn}(\mathbf{K})$ est une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}_{mn})$-mesurable, où $\mathcal{B}_{mn}$ désigne une tribu de parties de $M_{mn}(\mathbf{K})$ (avec **K** = **R** ou **K** = **C**).

On identifie souvent M au **vecteur aléatoire** $v(M) : \Omega \mapsto \mathbf{K}^{mn} = (\mathbf{K}^m)^n = \prod_{i=1}^n \mathbf{K}^m$ obtenu par **vectorialisation** de M.

(ii) Les exemples suivants illustrent cette première signification :

(a) une matrice $F_N = (f_{N,(i,j)})_{(i,j)=\{1,\ldots,m\}x\{1,\ldots,n\}}$ constituée de **fréquences empiriques** sommant à l'unité ($\Sigma_{N,(i,j)} f_{i,j} = 1$) est une matrice stochastique (**tableau de contingence** à 2 dimensions), où N désigne eg une taille d'**échantillon** ;

(b) la **matrice des covariances** empiriques S_N et la **matrice des corrélations** empirique C_N associées à un **vecteur aléatoire** sont des matrices stochastiques.

La **loi de WISHART** est un exemple de **loi de probabilité** d'une **va** matricielle W_N (cf **matrice d'observation**).

(iii) Dans le cadre des **processus de MARKOV**, on appelle :

(a) **matrice stochastique**, ou **matrice de MARKOV**, une matrice $M \in M_n(\mathbf{R}_+)$ tq (définition « en colonne ») :

$$(1) \quad \begin{cases} m_{ij} \geq 0, & \forall (i, j) \in (N_n^*)^2, \\ \Sigma_{i=1}^n m_{ij} = 1, & \forall j \in N_n^* \quad (\text{ie } e_n' M = e_n'). \end{cases}$$

Une définition en « ligne » se définit de façon duale ;

(b) **matrice doublement stochastique** une matrice stochastique M qui somme à 1 à la fois en colonne et en ligne :

$$(2) \quad \Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^n m_{ij} = 1 \quad (\text{ie } e_n' M e_n = e_n) ;$$

(c) **matrice stochastique régulière** une matrice stochastique M dont tous les éléments d'une puissance quelconque M^p sont strictement positifs. Dans ce cas, on montre que :

(c_1) M contient une ligne, unique, eg u, dont les éléments sont tous positifs ;

(c_2) la suite $(M^p)_{p \in \mathbf{N}^*}$ tend vers la matrice U = (u /// u) dont toutes les lignes sont égales à u (où /// désigne des sauts en ligne) ;

(c_3) si $s \in S_n (\mathbf{R})$ (**simplexe** de $\mathbf{R}^n$), alors la suite $(s \cdot M^p)_{p \in \mathbf{N}^*}$ tend vers u.

(iv) Les matrices de MARKOV vérifient notamment les propriétés suivantes :

(a) si $P \in M_n (\mathbf{R}_+)$ est une matrice à termes strictement positifs (ie tq $p_{ij} > 0$, $\forall$ (i, j)), alors, il existe deux **matrices diagonales** (uniques à une constante scalaire multiplicative près) Λ_1 et Λ_2 , dont les termes diagonaux sont strictement positifs, et tq $\Lambda_1 P \Lambda_2$ soit doublement stochastique ;

(b) si M et N sont des matrices stochastiques (en colonne), il en est de même de leur produit matriciel M . N ;

(c) pour toute matrice stochastique M, on a $1 \in \mathrm{Sp}\ M$ (cf **spectre d'un opérateur**). Cette **valeur propre** est simple si $m_{ij} \neq 0$, $\forall$ (i, j) ;

(d) les valeurs propres différentes de 1 d'une matrice stochastique M sont, en module, inférieures à 1, ie : $\lambda \in \mathrm{Sp}\ M$ et $\lambda \neq 1 \Rightarrow |\lambda| < 1$.

(v) La notion de matrice stochastique s'étend au cas des matrices « doublement dénombrables » (suites doubles sur $\mathbf{R}_+$), ainsi qu'au cas des matrices sous-markoviennes.