

MATRICE TRIANGULAIRE (A3)

(09 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée. On dit alors que :

(a) A est une **matrice triangulaire supérieure**, ou une **matrice triangulaire haute**, ssi :

$$(1) \quad t_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \text{ tq } j < i, \text{ ie } \forall (i, j) \in (\mathbf{N}_n^*)^2_{>}.$$

On note $T_n^+(\mathbf{K})$, ou parfois $T_n^{>}(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures ;

(b) A est une **matrice triangulaire inférieure**, ou **matrice triangulaire basse**, ssi sa transposée T' est une matrice triangulaire supérieure. On note $T_n^-(\mathbf{K})$, ou parfois $T_n^{<}(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

(ii) On montre que :

(a) si $(T_\alpha)_{\alpha=1, \dots, k}$ est une **suite** finie tq $T_\alpha \in T_n^+(\mathbf{K})$, $\forall \alpha \in \mathbf{N}_k^*$, alors $\prod_{\alpha=1}^k T_\alpha \in T_n^+(\mathbf{K})$;

(b) si $T \in T_n^+(\mathbf{K}) \cap R_n(\mathbf{K})$ (matrice triangulaire et **matrice régulière**), alors $T^{-1} \in T_n^+(\mathbf{K})$;

(c) si $T \in T_n^+(\mathbf{K})$, alors :

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{Dét } T &= \prod_{i=1}^n t_{ii}, \\ \text{Sp } T &= \text{Diag } T = \{t_{11}, \dots, t_{nn}\} \end{aligned}$$

(ensemble des éléments diagonaux de T) (cf **spectre d'un opérateur**) ;

(d) si $A \in M_n(\mathbf{R})$, $\exists P \in O_n(\mathbf{R})$ (**matrice orthogonale**) tq :

$$(3) \quad P A = T \in T_n^+(\mathbf{R}), \quad \text{avec } t_{ii} \geq 0, \forall i \in \mathbf{N}_n^*,$$

et $\exists Q \in R_n(\mathbf{K})$ (**matrice régulière**, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) tq :

$$(4) \quad \begin{aligned} Q^{-1} A Q &= S \in T_n^+(\mathbf{K}) \quad (\text{avec } \mathbf{K} = \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}), \\ \text{Diag } (Q^{-1} A P) &= \text{Sp } A. \end{aligned}$$

De plus, si $\text{Sp } A \subset \mathbf{R}$, alors $Q \in R_n(\mathbf{R})$ et $Q^{-1} A Q \in T_n^+(\mathbf{R})$;

(e) si $T \in T_n^+(\mathbf{K})$ et $\text{Diag } T = \{t_{11}, \dots, t_{nn}\}$, alors $\text{Diag } T^j = \{t_{11}^j, \dots, t_{nn}^j\}$, $\forall j \in \mathbf{N}^*$;

(f) si $T \in T_n^+(\mathbf{K}) \cap R_n(\mathbf{K})$ et si t^{ij} désigne le terme général de T^{-1} , alors $t_{ij} t^{ii} = 1, \forall i \in N_n^*$;

(g) soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice dont les **déterminants principaux** sont non nuls, ie tq :

$$(5) \quad \text{Dét} [(a_{11}, \dots, a_{1i}) \vdots (a_{i1}, \dots, a_{ii})] \neq 0, \quad \forall i \in N_n^*.$$

où $(a_{\alpha 1}, \dots, a_{\alpha i})$ désigne la α -ème ligne de la matrice principale correspondante ($1 \leq \alpha \leq i$) et $\vdots$ désigne des sauts de lignes de cette matrice. Alors,

$$(6) \quad A = S \cdot T, \quad \text{avec } S = (s_{ij})_{(i,i)} \in T_n^-(\mathbf{R}) \text{ et } T = (t_{ij})_{(i,i)} \in T_n^+(\mathbf{R}).$$

De plus, si $s_{ii} = 1$ (resp si $t_{ii} = 1$), $\forall i \in N_n^*$, alors le couple (S, T) est unique ;

(h) soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice tq $\text{Sp } A \subset \mathbf{R}$. Alors, $\exists P \in O_n(\mathbf{R})$ tq :

$$(7) \quad \begin{aligned} P' A P &= T \in T_n^+(\mathbf{R}), \\ \text{Sp } P &= \text{Sp } A. \end{aligned}$$