MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE À INFORMATION LIMITÉE (H3, J1)
(16 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La méthode du maximum de vraisemblance à information limitée a pour objet l'estimation d'un **modèle d'interdépendance** à partir d'une **information** partielle, limitée à une équation, ou parfois à certaines équations, du modèle. La loi sous-jacente au modèle est généralement une **loi gaussienne**.

(i) Dans le cas d'un **modèle d'interdépendance linéaire**, l'équation d'indice g s'écrit sous la forme :

(1) $y_g = Y_g b_g + X_g c_g + u_g$,

dans laquelle y_g est le vecteur (à valeurs dans $\mathbf{R}^N$) des N **observations** de la g-ième **variable endogène** η_g , Y_g la **matrice des observations** relatives aux autres variables endogènes du modèle qui apparaissent effectivement dans cette équation (**matrice aléatoire** à valeurs dans $M_{N,G(g)}$ (**R**), où G_g (aussi noté G(g)) est le nombre des variables endogènes en question), $b_g \in \mathbf{R}^{G(g)}$, X_g la matrice des observations relatives aux **variables exogènes** (ou prédéterminées) qui apparaissent effectivement dans l'équation (matrice à valeurs dans $M_{N,K(g)}$ (**R**)), $c_g \in \mathbf{R}^{K(g)}$ et u_g la **perturbation aléatoire** (à valeurs dans $\mathbf{R}^N$).

G étant le nombre total d'équations du modèle, on suppose donc que $G_g \leq G$; K étant le nombre total de variables exogènes (ou prédéterminées) du modèle, on suppose que $K_g < K$ et que $K - K_g \geq G_g$.

On note X = [X, X_g*] la matrice des observations de toutes les variables exogènes (ou prédéterminées) (cf **variable prédéterminée**) : X_g* est donc à valeurs dans $M_{N,K^*(g)}$ (**R**), avec $K_g^* = K - K_g$, et l'on suppose que rg X = K. Enfin, on suppose que u_g est indépendante de X et que :

(1) $u_g \sim \mathcal{N}_N (0, \sigma_g^2 I_N)$ (**loi normale multidimensionnelle** centrée).

La **forme réduite** du modèle s'écrit :

(2) $Y^* = [y_g , Y_g] = X_g [a_g , A_g] + X_g^* [a_g^* , A_g^*] + [v_g , V_g]$.

On suppose que rg $A_g^* = G_g$ et que les lignes de la **matrice stochastique** $[v_g , V_g]$ des **perturbations** forment des **suite iid** selon $\mathcal{N}_{G(g) + 1} (0, \Sigma)$.

(ii) On appelle alors **estimateur du maximum de vraisemblance (gaussienne) à information limitée** (mvil) du paramètre $d_g = (b_g', c_g')'$ l'estimateur $d_g^\sim = (b_g^{\sim\prime}, c_g^{\sim\prime})'$ donné par :

$$(3) \quad \begin{aligned} b_g^\sim &= (Y_g' Q_{inf} Y_g)^{-1} Y_g' Q_{min} y_g , \\ c_g^\sim &= (X_g' X_g)^{-1} X_g' (y_g - Y_g b_g^\sim), \end{aligned}$$

formule dans laquelle :

(4) $Q_{min} = P_g - \lambda_{inf} P$,

où λ_{min} est la plus petite racine de l'équation (en λ) :

(5) $\text{Dét}\,(Y^{*\,\prime} P_g Y^* - \lambda\, Y^{*\,\prime} P Y^*) = 0$,

avec $P_g = I_N - X_g (X_g' X_g)^{-1} X_g'$ et $P = I_N - X (X' X)^{-1} X'$.

(ii) On montre que l'estimateur du mvil $d_g^{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) $\lambda_{min} \geq 1$ (p.s.) ;

(b) il ne possède (en général) aucun **moment** d'ordre entier (positif) ;

(c) il n'est pas admissible pour des **fonctions de perte** tq une **perte quadratique** ;

(d) sous certaines **conditions de régularité**, il est asymptotiquement gaussien (cf **normalité asymptotique**).