

MÉDIALE (C5, F3)

(19 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}^+}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une **va** non négative intégrable, dont la **lp** P^ξ admet pour **densité**, pr à la (**restriction** de la) **mesure de LEBESGUE** sur $\mathbf{R}_+$, la fonction $f = dP^\xi / d\lambda_{\mathbf{R}^+}$.

On définit une **fonction numérique** $x \in \mathbf{R}_+ \mapsto \gamma(x) \in [0,1]$ selon (**espérance mathématique** relative « cumulée ») :

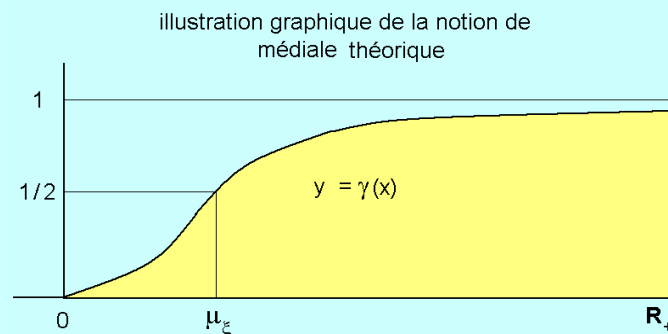
$$(1) \quad \gamma(x) = (E \xi)^{-1} \int_0^x t \cdot f(t) dt = (E \xi)^{-1} \int_{[0,x]} t \cdot f(t) dt = (E \xi)^{-1} \cdot E(1_{[0,x]} \cdot \xi).$$

On appelle alors **intervalle médial (théorique)** de ξ l'**ensemble** $\mathcal{M}$ des solutions μ_ξ de l'équation en x suivante :

$$(2) \quad \gamma(x) = 1/2.$$

Autrement dit, $\mathcal{M} = \{x \in \mathbf{R}_+ : \gamma(x) = 1/2\}$.

Si γ est strictement croissante, la solution de (2) est unique : on l'appelle (**valeur médiale (théorique)**), ou simplement **médiale (théorique)**, de ξ (cf schéma ci-dessous).



(ii) On montre que :

(a) si elle est unique, la médiale vérifie $\mu_\xi \geq Q_{1/2} \xi$ (**médiane** de ξ) ;

(b) si $i_G = 0$ (**coefficient de concentration** nul), $\mu_\xi = Q_{1/2} \xi$ (cf **coefficient de GINI**).

(iii) La médiale théorique possède une analogue empirique. Si X est un **échantillon iid** de taille N distribué selon P^ξ , la **médiale (empirique)** $m_N(X)$ se calcule en remplaçant P^ξ par la **loi empirique** P_N associée à X (cf **statistique naturelle**). Autrement dit, $m_N(X)$ est une solution de l'équation en x :

$$(1) \quad g(x) = \{N^{-1} \sum_{n=1}^N 1_{[0,x]}(X_n)\} / \{N^{-1} \sum_{n=1}^N X_n\} = 1/2.$$

où le dénominateur $N^{-1} \sum_{n=1}^N X_n$ est la **moyenne empirique** $\bar{X}_N$ de X . Ainsi, toute solution de l'équation $\{\sum_{n=1}^N X_n\}^{-1} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{[0,x]}(X_n) = 1/2$ appartient à l'**intervalle médial** empirique.

(iv) Une extension directe de la notion consiste à définir des « **médiales** » d'ordre $p \in]0, 1[$ en remplaçant $1/2$ par p dans (2).