MESURE BORNÉE (A5)
(19 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $\mathcal{X}$ un **ensemble** et $\mathcal{C}$ un **clan** (resp un σ-clan, resp une **tribu**) de **parties** de $\mathcal{X}$ et μ une **mesure** (abstraite). On suppose que μ est une **mesure positive** sur $\mathcal{C}$.

On dit que μ est une **mesure bornée** sur $\mathcal{C}$ ssi l'application $\mu : \mathcal{C} \mapsto \overline{\mathbf{R}}_+$ est une **application bornée**, ie ssi :

(1) $\exists\, M \in \mathbf{R}_+^*$ tq $\mu(C) \leq M, \quad \forall\, C \in \mathcal{C}$.

On montre que toute mesure bornée est une **mesure σ-finie**.

(ii) Soit $\mathcal{X}$ un **espace localement compact** et μ une **mesure de RADON** sur $\mathcal{X}$.

On dit que μ est une **mesure bornée** ssi elle est continue sur l'espace $\mathcal{C}_k(\mathcal{X})$ des **fonctions numériques** continues (cf **application continue**) à **support** compact (cf **partie compacte**), muni de la **topologie** de la **convergence uniforme**, ie ssi :

(2) $\exists\, M \in \mathbf{R}_+^*$ tq $|\mu(f)| \leq M \,.\, ||f||_\infty, \quad \forall\, f \in \mathcal{C}_k(\mathcal{X})$,

où $||.||_\infty$ désigne la **norme** de la convergence uniforme.

Si l'on appelle **norme d'une mesure de RADON** μ la fonction $||.||$ qui lui associe le nombre (élément de $\overline{\mathbf{R}}_+$) :

(3) $||\mu|| \;=\; \sup_{f \in \mathcal{C}k(\mathcal{X})\,:\,||f||\infty \leq 1} |\mu(f)|$,

ie la norme de l'**application linéaire** continue μ, alors μ est bornée ssi $||\mu|| < +\infty$ (on note, par commodité, Ck($\mathcal{X}$) pour désigner $\mathcal{C}_k(\mathcal{X})$ et $||f||\infty$ pour désigner $||f||_\infty$).

(iii) Soit $\mathcal{X}$ un ensemble quelconque et $\mathcal{B}$ une **tribu de parties** de $\mathcal{X}$.

On dit que la mesure (abstraite) positive μ définie sur $\mathcal{B}$ est une **mesure presque bornée** sur $\mathcal{B}$ ssi il existe une **suite mesurable** $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (ie $B_n \in \mathcal{B}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$) tq :

(a) $B_n \subset B_{n+1}$ (suite croissante) ;

(b) $\mu(B_n) < +\infty, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$;

(c) $\lim_n B_n \;=\; \cup_{n \in \mathbf{N}} B_n \;=\; \mathcal{X}$ (on peut avoir $\mu(\mathcal{X}) = +\infty$).