MESURE DE DANIELL (A5)
(25 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Notion généralisant, à la fois, celle de **mesure abstraite** (ou mesure ensembliste) et celle de **mesure de RADON**.

(i) Soit $\mathscr{X}$ un **ensemble** quelconque, $\mathscr{R}$ un **espace de RIESZ** de **fonctions numériques** sur $\mathscr{X}$ et μ une **forme linéaire** complexe sur $\mathscr{R}$: $\mu \in$ Hom ($\mathscr{R}$, **C**) (**homomorphismes**).

On dit que μ est une **mesure de P.J. DANIELL** sur $\mathscr{R}$ ssi elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(a) $\forall$ f $\in \mathscr{R}$ tq f $\geq$ 0, $\exists$ M $\in$ $\mathbf{R}_+^*$ tq, $\forall$ g $\in \mathscr{R}$ tq |g| $\leq$ f, on a $|\mu\ (g)| \leq M$ (ie la forme linéaire μ est bornée, quelle que soit la fonction g dominée par une fonction positive de $\mathscr{R}$) (cf **fonction dominée**) ;

(b) pour toute suite décroissante $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tq $f_n \in \mathscr{R}$ et $f_n \geq 0$ ($\forall$ n $\in$ **N**) et tq $\lim_n f_n = 0$, on a $\lim_n \downarrow \mu\ (f_n) = 0$ (ie μ est continue à l'origine : $f_n \downarrow 0 \Rightarrow \mu\ (f_n) \downarrow 0$).

(ii) Si l'image de μ est dans **R**, on dit que μ est une **mesure de DANIELL réelle**, ou une **mesure de DANIELL signée**. On peut toujours écrire $\mu = \mu^+ - \mu^-$, où μ^+ (resp μ^-) est la **partie positive** (resp la partie négative) de μ, chacune de ces deux mesures étant une **mesure positive**.

Si μ (f) $\geq$ 0, $\forall$ f $\in \mathscr{R}$ tq f $\geq$ 0, on dit que μ est une **mesure de DANIELL positive**.

Si l'image de μ est dans **C** (sans être dans **R**), on peut écrire μ = Ré μ + i Im μ, où Ré μ (resp Im μ) est la partie réelle (resp imaginaire) de μ, toutes deux étant des mesures réelles : ceci définit une **mesure de DANIELL complexe**.

Le triplet ($\mathscr{X}$, $\mathscr{R}$, μ) est appelé **espace de P.J. DANIELL**.