MESURE DE LEBESGUE (A5)
(05 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Comme la **mesure discrète** (eg **mesure de comptage**), la mesure de LEBESGUE est une mesure couramment utilisée en **calcul des probabilités** ou en **Statistique**.

(i) Dans l'**espace mesurable** $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, l'**ensemble** $\mathcal{S}$ des **« pavés »** $R_n = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i]$ (ou rectangles lorsque n = 1) est un semi-**anneau de BOOLE** engendrant la **tribu borélienne** $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ de parties de $\mathbf{R}^n$.

On montre que la fonction μ, définie sur $\mathcal{S}$ selon (mesure élémentaire de **volume**) :

(1) $R_n \mapsto \mu(R_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$,

peut être prolongée sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ en une mesure β (cf **extension d'une application**).

Cette mesure β est appelée **mesure de F.E.J.E. BOREL**.

La (mesure) complétée $\overline{\beta}$ de β est appelée **mesure de H.L. LEBESGUE** de $\mathbf{R}^n$ ou **mesure de H.L. LEBESGUE** sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ (cf **espace mesuré complet**).

Le plus souvent, $\overline{\beta}$ est notée λ_n . De même, d $\overline{\beta}$ est noté $d\lambda_n$ ou même simplement $dx = \prod_{i=1}^n dx_i$, avec $x \in \mathbf{R}^n$:

(2) $\overline{\beta}(B) = \int \mathbf{1}_B \, dx = \int \mathbf{1}_B \, d\lambda_n$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.

On écrit aussi $\lambda_n(dx)$ au lieu de $d\lambda_n(x)$.

La mesure λ_1 sur $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ est souvent simplement notée λ.

(ii) Si $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ est une **fonction intégrable** pr à λ_n (ie une fonction λ_n-intégrable), on appelle **intégrale de H.L. LEBESGUE** l'application $f \mapsto \int f \, d\lambda_n$.

(iii) La mesure de LEBESGUE est ainsi naturellement associée à la **mesure des volumes** de $\mathbf{R}^n$. Le **volume** de la **boule** unité de $\mathbf{R}^n$ est un exemple de calcul de la mesure (au sens de LEBESGUE) d'une **partie mesurable** de $\mathbf{R}^n$.

La notion de **probabilité géométrique** fait aussi usage du concept de mesure de LEBESGUE (eg lorsque les figures géométriques en question peuvent être considérées comme plongées dans un espace ambiant de type « continuum »).