MESURE DE RADON (A5)

(05 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La **mesure de RADON** est une mesure classique de la **théorie de la mesure** qui entretient des liens étroits avec la notion de **mesure abstraite**.

(i) Soit $(E, \mathcal{O})$ un **espace localement compact**.

On appelle **mesure de J.K. RADON** sur E toute **forme linéaire** u , définie sur l'**espace vectoriel** $\mathcal{G}_k(E)$ des **fonctions numériques** $f : E \mapsto \mathbf{R}$ continues à **support compact** et tq, $\forall K \in \mathcal{K}(E)$ (classe des **parties compactes** de E), $\exists M_K \geq 0$ tq :

$$(1) \quad |u(f)| \leq M_K \cdot \|f\|, \quad \forall f \in \mathcal{G}_k(E) \text{ tq } \text{Supp } f \subset K.$$

La valeur $u(f)$ de la forme linéaire u en f est notée $\int f \, du$, ou $\int f(x) \, du(x)$, ou encore $\int f(x) u(dx)$.

(ii) $\mathcal{G}_k(E)$ est un **espace de RIESZ**, ie un espace vectoriel (réel) ordonné ($f \leq g \Rightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in E$) et réticulé ($(f, g) \in (\mathcal{G}_k(E))^2 \Rightarrow \sup(f, g) \in \mathcal{G}_k(E)$ et $\inf(f, g) \in \mathcal{G}_k(E)$).

On appelle alors **mesure (de J.K. RADON) positive** sur E une mesure de RADON qui est une forme linéaire positive sur E , ie tq :

$$(2) \quad f \in \mathcal{G}_k(E) \text{ et } f \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq 0.$$

Par distinction, une mesure de RADON quelconque (ie non nécessairement positive) est dite **mesure signée**. En effet, la différence u de deux mesures de RADON positives sur E est une mesure de RADON sur E .

(iii) On montre qu'à toute **mesure positive** μ localement finie sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ on peut associer une mesure de RADON u tq $u(f) = \int f \, d\mu, \forall f \in \mathcal{G}_k(\mathbf{R}^n)$.

La réciproque est contenue dans le **théorème de RIESZ**.