MESURE DE PROBABILITÉ (A5, B1, C4)
(12 / 10 / 2022, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2022)

Le concept de **mesure de probabilité** est une notion de base du **calcul des probabilités** et de la **Statistique**.

(i) Soit E un **ensemble** muni d'une **tribu de parties** $\mathscr{A}$.

On appelle **mesure de probabilité**, ou simplement **probabilité**, sur $\mathscr{A}$ (ou sur E) toute **mesure** positive μ définie sur $\mathscr{A}$ et tq μ (E) = 1 (cf **mesure positive**, **mesure abstraite**).

D'après un **théorème de RIESZ**, μ peut aussi être définie comme **mesure de RADON**.

(ii) En général :

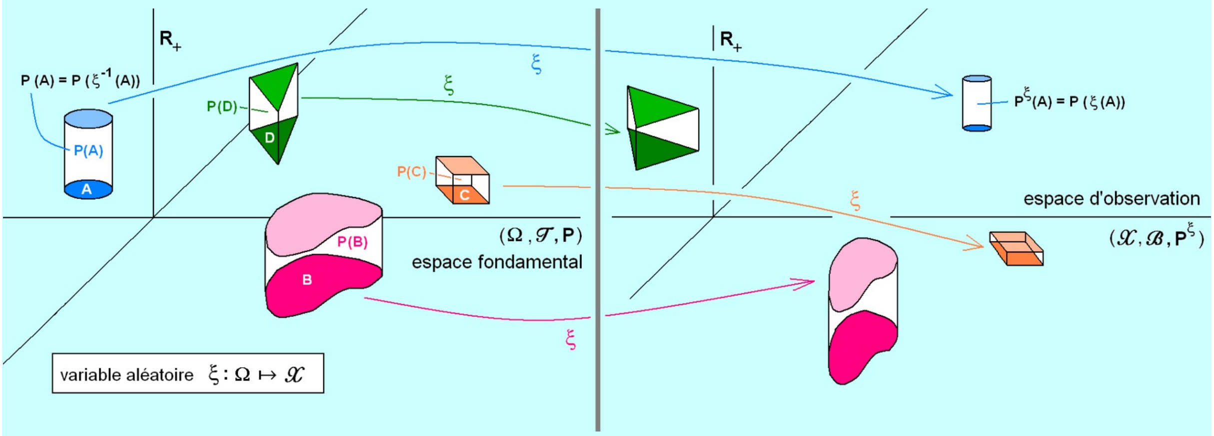
(a) E est un ensemble, appelé **ensemble fondamental**, ici noté Ω, et constitué d'**événements** (**élémentaires**) $\omega \in \Omega$. On peut aussi considérer que les éléments $\omega \in \Omega$ sont des **unités statistiques** (« individus », etc) (cf **espace fondamental**) ;

(b) une partie A $\in \mathscr{A}$ est alors considéré comme un **événement complexe** et la tribu $\mathscr{A}$ est notée $\mathscr{T}$: c'est la **tribu des évènements** (complexes) qui intéresse le **statisticien** ;

(c) enfin, la mesure μ précédente est généralement notée P.

On note alors (Ω, $\mathscr{T}$) l'**espace probabilisable** et (Ω, $\mathscr{T}$, P) l'**espace probabilisé** (fondamental) ainsi définis.

Mesure de probabilité (à gauche) et loi de probabilité (à droite)



*Le panneau de gauche ci-dessus décrit une espace (probabilisé) fondamental (Ω, $\mathcal{T}$, P) dans lequel Ω est l'ensemble de base, constitué d'**unités statistiques** ou d'**événements** élémentaires, $\mathcal{T}$ une **tribu de parties** de Ω et P : $\mathcal{T} \mapsto \mathbf{R}_+$ une mesure de probabilité. Les parties A, B, C et D $\in \mathcal{T}$ sont toutes supposées disjointes deux à deux. Le panneau de droite décrit un espace (probabilisé) d'observation ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$, P^{ξ}), constitué des valeurs (dans $\mathcal{X}$) associées à une **variable aléatoire** donnée $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$. Toute partie (eg A $\in \mathcal{T}$) est dotée d'une probabilité P (A) $\in$ [0, 1]. La va ξ transporte les masses de probabilité tq P (A) dans l'espace d'observation, ce qui définit la **loi de probabilité** P^{ξ} associée à P, en sorte que P^{ξ} (ξ^{-1} (A)) = P (A), $\forall$ A $\in \mathcal{T}$.*

(iii) Une mesure de probabilité est aussi appelée **mesure normée** puisque, avec les nouvelles notations, P (Ω) = 1.

Toute mesure positive bornée ν (cf **mesure bornée**), supposée non identiquement nulle, permet de construire une (mesure de) probabilité P. En effet, la **mesure normée**, ou **mesure « dilatée »** :

(1) $P = \nu / \nu(\Omega)$

est une probabilité sur $\mathcal{T}$ (cf aussi **normalisation**).

(iv) En général, on considère aussi (voire exclusivement) un **espace mesurable** auxiliaire, appelé **espace d'observation**, ($\mathcal{Z}$, $\mathcal{D}$) tq les « valeurs » z $\in \mathcal{Z}$ sont susceptibles d'être observées sur les unités ω précédentes. Autrement dit, on associe à tout $\omega \in \Omega$ une valeur z $\in \mathcal{Z}$ par le biais d'une **application mesurable** f : $\Omega \mapsto \mathcal{Z}$, appelée **variable aléatoire**. On note souvent ζ au lieu de f, d'où la notation usuelle $\zeta(\omega) = z \in \mathcal{Z}$.

La fonction ζ **« impute »** à chaque unité ω un **« attribut »**, ou **« descripteur »**, ou « **caractère** » z, voire plusieurs, qualitatifs ou numériques, dont le but est de caractériser l'unité d'un certain point de vue, en fonction du **domaine de connaissance** et du type de **phénomène** observé :

(a) s'il existe K variables numériques décrivant chaque unité ω (cf **variable quantitative**), $\mathcal{Z}$ est un **ensemble numérique** produit tq $\mathcal{Z} = \prod_{k=1}^{K} \mathcal{Z}_k$. On notera plutôt $\mathcal{X}$ cet ensemble de valeurs numériques : eg $\mathcal{X}$ = **N**, ou $\mathcal{X}$ = **Z** (avec K = 1), ou $\mathcal{X} = \mathbf{D}^K$ (nombres décimaux), $\mathcal{X} = \mathbf{Q}^K$ (nombres rationnels), $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$, etc. De même, la **va** ζ sera notée ξ et l'une quelconque de ses valeurs x (au lieu de z) ;

(b) s'il existe H variables non numériques décrivant chaque unité ω (cf **variable qualitative**), $\mathcal{Z}$ est un **ensemble de descripteurs** qualitatifs de la forme produit $\mathcal{Z} = \prod_{h=1}^{H} \mathcal{Z}_h$. On notera plutôt $\mathcal{K} = \prod_{h=1}^{H} \mathcal{K}_h$ cet ensemble de « valeurs ». Chaque ensemble composant contient alors les **modalités** d'une variable qualitative dédiée : eg $\mathcal{K}_h = \{k_{h,1}, \ldots, k_{h,M(h)}\}$, où M_h (noté M(h)) est le nombre de ces modalités et les $k_{k,m(h)}$ les modalités (non numériques) elles-mêmes, où m_h (noté m(h)) $\in$ {1 ,..., M_h}. De même, la **va** ζ sera notée κ et l'une quelconque de ses valeurs k (au lieu de z) ;

(b) enfin, on considère souvent un couple d'ensembles ($\mathscr{X}$, $\mathscr{K}$) dans lequel $\mathscr{X} = \Pi_{k=1}^{K} \mathscr{X}_k$ est numérique et $\mathscr{K} = \Pi_{h=1}^{H} \mathscr{K}_h$ non numérique. Par suite, il existe K variables numériques et H variables non numériques décrivant chaque unité ω. On notera plutôt $\zeta = (\xi, \kappa)$ pour désigner (en conformité) le **couple aléatoire** (« multiple ») décrivant les unités de Ω.

Lorsque K > 1 (ou H > 1), $\mathscr{X}$ (ou $\mathscr{K}$) est souvent appelé **ensemble multivarié**, ou, par abus de language, **ensemble multidimensionnel** ou **ensemble à plusieurs dimensions** (alors même qu'il n'est pas doté d'une structure d'**espace vectoriel**). La terminologie se transpose aux variables correspondantes : ξ (ou κ) est appelée variable multivariée, ou variable multidimensionnelle (cf **analyse multidimensionnelle**, **échelle multidimensionnelle**, **loi multidimensionnelle**).

(v) D'un point de vue terminologique, de même qu'on parle de « fonction f (x) » au lieu de « fonction f : E $\mapsto$ F », on dit très souvent « probabilité P (A) » au lieu de « probabilité P : $\mathscr{T} \mapsto \mathbf{R}_+$ ».

C'est évidemment confondre une **application** (ici une **fonction d'ensembles**) P et l'une de ses valeurs en un « point » A $\in \mathscr{T}$.