MESURE DISCRÈTE (A5)
(14 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **mesure discrète** est une **mesure** élémentaire associée aux notions de dénombrement ou de dénombrabilité.

(i) Soit ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$) un **espace mesurable** et $\alpha : \mathscr{X} \mapsto \overline{\mathbf{R}}_+$ une fonction non négative tq la **famille** $(\alpha(x))_{x \in B}$ soit sommable, $\forall B \in \mathscr{B}$.

On appelle **mesure discrète**, ou **mesure atomique**, ou encore **mesure de dénombrement** (pondéré), ou parfois **mesure ponctuelle**, sur $\mathscr{B}$ la **mesure** μ définie selon :

(1) $\mu(B) = \Sigma_{x \in B}\ \alpha(x), \qquad \forall B \in \mathscr{B}$.

On dit que μ est la **mesure définie par les masses** $\alpha(x)$ affectées aux points $x \in \mathscr{X}$.

(ii) Toute mesure discrète μ définie sur $\mathscr{B}$ est une **mesure finie**. En effet, pour que la famille $(\alpha(x))_{x \in B}$ soit sommable, il faut que $\alpha(x) = 0$ sauf sur une partie (au plus) dénombrable de $\mathscr{B}$.

Par ailleurs, une mesure discrète μ ne comporte qu'un **ensemble** (au plus) dénombrable de points $x \in \mathscr{X}$ de masse non nulle. Si l'on note $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de ces points et si l'on pose $\alpha_n = \alpha(x_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, on obtient la **représentation d'une mesure discrète** :

(2) $\mu(B) = \Sigma_{x(n) \in B}\ \alpha(x_n) = \Sigma_{x(n) \in B}\ \alpha_n, \qquad \forall B \in \mathscr{B}$,

qui s'écrit aussi à l'aide de **fonctions indicatrices** :

(3) $\mu(B) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}}\ \alpha_n \,.\, \mathbf{1}_B(x_n), \qquad \forall B \in \mathscr{B}$,

ou encore à l'aide de **mesures de DIRAC** :

(4) $\mu(B) = \Sigma_{x(n) \in \mathscr{X}}\ \alpha_n \,.\, \delta_{x(n)}(B), \qquad \forall B \in \mathscr{B}$.

où x(n) désigne, par commodité, x_n .

(iii) A titre d'exemple, soit $\mathscr{X}$ un **ensemble au plus dénombrable**, ie :

(a) soit fini : eg $\mathscr{X} = N_n = \{0, 1,..., n\}$, ou $\mathscr{X} = Z_{mn} = \{-m,..., -1, 0, +1,..., +n\}$;

(b) soit dénombrable : eg $\mathscr{X}$ = **N**, $\mathscr{X}$ = **Z** ou $\mathscr{X}$ = **Q** (ie en **bijection** avec **N** lui-même).

Si α est la fonction **constante** partout égale à l'unité (ie si $\alpha(x) = 1, \forall x \in \mathscr{X}$) et si $\mathscr{X}$ est au plus dénombrable, on dit que μ est une **mesure de comptage**, ou une mesure de dénombrement (non pondéré).

(iv) En **calcul des probabilités** et en **Statistique**, un exemple important de mesure discrète est celui de **probabilité** discrète.

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un **espace probabilisé**. On dit que P est une **(mesure de) probabilité discrète** ssi P, en tant que **mesure positive** définie sur $\mathscr{T}$, est une mesure discrète sur $\mathscr{T}$.

De même, si $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ est un **espace mesurable** auxiliaire (eg un **espace d'observation**) et si $X : \Omega \mapsto \mathscr{X}$ est une **va** donnée (eg un **échantillon**), alors la **loi de probabilité** $P^X = X(P)$ de X est appelée **loi (de probabilité) discrète**, ou simplement **loi discrète**, ssi la mesure P^X définie sur $\mathscr{B}$ est une mesure discrète (cf aussi **discrétisation**, **variable discrète**).

(v) Ainsi, les lois suivantes sont des lois discrètes : **loi binômiale**, **loi binômiale négative**, **loi de PARETO discrète**, **loi de BERNOULLI**, **loi géométrique**, **loi factorielle**, **loi multinômiale**, **loi normale discrète**, **loi uniforme discrète**.