MESURE ERGODIQUE (A5, N12)
(10 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **théorie ergodique** reçoit une application importante en **Statistique** dans l'étude des **séries temporelles** ou de celle des **processus** qui les génèrent. Cette théorie possède un fondement mathématique : le concept de **mesure ergodique** (cf aussi **mesure décomposable**).

(i) Soit (E, $\mathcal{O}$) un **espace localement compact** métrisable séparable (cf **espace métrisable**, **espace séparable**) et μ une **mesure positive** sur E (au sens où μ est élément du **dual topologique** de l'**espace de BANACH** $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ (E) des fonctions réelles continues sur E, élément tq $f \geq 0 \Rightarrow \mu\,(f) \geq 0$).

On considère une **application propre** $\varphi : E \mapsto E$, ie une **application** tq :

(1) $\varphi^{-1}\,(K) \in \mathcal{K}\,(E))$, $\forall\, K \in \mathcal{K}\,(E)$ (classe des **parties compactes** de E).

On suppose φ continue et tq μ soit invariante par φ (cf **mesure invariante**), ie :

(2) $\mu^{\varphi} = \varphi\,(\mu) = \mu,$

où μ^{φ} désigne la **mesure image** de μ par φ.

On dit alors que μ est une **mesure ergodique** pour φ, ou encore que φ est une **application ergodique** pour μ, ssi les seules fonctions de $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}$ (E) qui soient μ-mesurables et μ-invariantes par φ sont les fonctions **constantes** μ-p.p..

(ii) On montre que, si μ est ergodique (pour φ) et si f est une fonction μ-intégrable (cf **fonction intégrable**), la fonction f_∞ définie selon :

(3) $f_\infty\,(x) = \lim_n\; n^{-1} . \Sigma_{i=0}^{n-1}\; f\,(\varphi^i\,(x)),$ $\forall\, x \in E,$

est μ-p.p. constante.

De plus, si E est compact (cf **espace compact**), cette fonction constante n’est autre que :

(4) $f_\infty = \mathbf{1}_E . (\mu\,(E))^{-1} . \int f\, d\mu.$