

MESURE TENDUE (A5)

(04 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **mesure tendue** peut se définir soit à partir d'un espace métrique, soit à partir d'un espace vectoriel topologique.

(i) Soit (E, d) un **espace métrique** dont la **topologie** est notée $\mathcal{O}$ et la **tribu borélienne** associée $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$. Soit μ une **mesure** définie sur $(E, \mathcal{B})$.

On dit que μ est une **mesure tendue** ssi :

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \in \mathcal{K}(E) \text{ tq } \mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon,$$

où $\mathcal{K}(E)$ désigne la classe des **parties compactes** de E .

Une **famille** $\mathcal{M}$ de mesures définies sur $\mathcal{B}$ est appelée **famille de mesures tendue**, ou **famille tendue, (uniformément)** ssi tout élément μ de $\mathcal{M}$ est une **mesure tendue**, ie ssi (**tension uniforme**) :

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \in \mathcal{K}(E) \text{ tq } \mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}.$$

(ii) Soit (Ω, d) un **espace métrique**, dont la **distance** est d , $\mathcal{O}$ la **famille** des **ouverts** de Ω , $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{O})$ sa tribu borélienne et P une **mesure de probabilité** définie sur $\mathcal{T}$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est donc un **espace probabilisé**.

On définit alors, comme précédemment, une notion de **(mesure de) probabilité tendue** P sur Ω .

De même, si $\mathcal{P}$ est une **famille** de **probabilités** définies sur $\mathcal{T}$, on obtient de même la notion de **famille tendue (de probabilités)** $\mathcal{P}$ sur Ω .

(iii) Une **lp** étant une **mesure de probabilité** particulière, on définit directement les notions de **loi (de probabilité) tendue** et de **famille tendue (de lois)** (cf aussi **suite tendue de va**).

(iv) Soit $(E, \mathcal{O})$ un **espace vectoriel topologique** muni de la classe de ses parties compactes $\mathcal{K}(E)$ et de sa **tribu de BAIRE** $\mathcal{B}_a$.

Une mesure μ définie sur $\mathcal{B}_a$ est appelée **mesure tendue** sur E (ou sur $\mathcal{B}_a$) ssi :

(a) μ est une **mesure bornée** sur $\mathcal{B}_a$;

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \in \mathcal{K}(E)$ tq : $\forall A \in \mathcal{B}_a, A \cap K_\varepsilon = \emptyset \Rightarrow \mu(A) < \varepsilon$.