MESURES ÉTRANGÈRES (A5)
(25 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit (E, $\mathscr{A}$) un **espace mesurable**, μ et ν deux **mesures positives** définies sur $\mathscr{A}$.

On dit que μ et ν sont des **mesures étrangères**, ou des **mesures singulières**, ou parfois des **mesures disjointes**, entre elles, ou qu'elles sont des **mesures mutuellement étrangères**, ou encore que μ (resp ν) est étrangère à ν (resp μ) ssi il existe N $\in \mathscr{A}$ tq, à la fois :

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu(N) = 0, \\ \nu(N^c) = 0. \end{cases}$$

(ii) Autrement dit, N est μ-négligeable et N^c = E \ N est ν-négligeable. Ces deux mesures sont donc resp « portées » par deux **parties mesurables** de E qui sont disjointes entre elles (comparer avec la notion de **support d'une mesure**). On note eg $\mu \perp \nu$ ou μ][n.

(iii) Soit μ et ν deux **mesures réelles** quelconques, définies sur $\mathscr{A}$ et à valeurs dans **R**.

On dit que μ et ν sont des **mesures étrangères**, ou des **mesures singulières**, ou encore des **mesures disjointes**, entre elles ssi :

$$(2) \qquad \inf(|\mu|, |\nu|) = 0.$$

Deux mesures μ et ν vérifient (2) ssi il existe une **partie** A $\in \mathscr{P}$(E) tq A porte μ et que A^c porte ν.

(iv) A titre d'exemple, toute **mesure discrète** définie sur $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ est étrangère à la **mesure de BOREL** (resp à la **mesure de LEBESGUE**) de $\mathbf{R}^n$.

Ceci est le cas eg d'une **mesure de DIRAC**.