**MÉTHODE DE MUNRO-ROBBINS (D1, D2, F9, H3)**
(17 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Comme la **méthode de KIEFER-WOLFOWITZ**, la méthode de MUNRO-ROBBINS est une méthode d'**estimation** par **approximation stochastique**. Elle consiste en une estimation progressive (**estimation séquentielle**) fondée sur une loi conditionnelle.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\zeta = (\xi, \eta) : \Omega \mapsto \mathbf{R}^2$ un **couple aléatoire** réel de **loi** $P^\zeta$.

On note $P^\eta(. / \xi)$ ou $P(\eta / \xi)$ la **loi conditionnelle** de $\eta$ sachant $\xi$ et l'on pose (**espérance conditionnelle** de $\eta$ sachant $\xi$) :

(1) $E(\eta / \xi = x) = \int y \, dP^{(\eta / \xi = x)}(y),$

ce qui permet de définir la **fonction de régression** de $\eta$ en $\xi$.

On note $y \mapsto F^\eta(y / \xi = .)$ la **fonction de répartition** conditionnelle de $\eta$ sachant $\xi$. Une valeur $p \in ]0,1[$ étant donnée, on veut estimer, par **expérimentation** progressive, une valeur (supposée unique) $x^\#$ de $\xi$ tq :

(2) $E(\eta / \xi = x^\#) = p.$

(ii) A titre d'exemple, si $\xi$ mesure la **dose** (ou **seuil**) d'un **traitement** donné et $\eta$ la **proportion** des **unités expérimentales** qui « réagissent » à cette dose, alors $E(\eta / \xi)$ est l'espérance mathématique de cette proportion (proportion moyenne des unités qui réagissent).

On estime donc le **quantile conditionnel** d'ordre p de cette proportion. Souvent p = 1/2 et l'on estime la **médiane** (conditionnelle).

(iii) La **méthode de M.E. MUNRO - H. ROBBINS** procède comme suit :

(a) on suppose que $\zeta$ est de carré intégrable, qu'il existe une **constante** c tq $P([|\eta| \leq c / \xi = c]) = 1$ et que :

(3) $$E(\eta / \xi = x) \quad \begin{cases} < p \text{ si } x < x^\# ; \\ \geq p \text{ si } x \geq x^\# ; \end{cases}$$

(b) on choisit une suite de nombres positifs $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ (avec $\lambda_n > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$) tq :

(4) $$\begin{aligned} &\Sigma_{n \in \mathbf{N}^*} \lambda_n = +\infty, \\ &\Sigma_{n \in \mathbf{N}^*} \lambda_n^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\lambda$ définie par $\lambda_n = h \,.\, n^{-\alpha}$ (avec $h > 0$ et $\alpha \in ]1/2, 1]$ vérifie (4).

La suite $\lambda$ étant donnée (eg $\lambda_n = n^{-2/3}$), on recommence l'expérience en utilisant une dose $x_2 = x_1 + \lambda_1 (p - y_1)$, qui amène un résultat $y_2$ , etc.

Le **théorème de R.A. SACK** indique que, sous des conditions assez générales, la suite $(x_n - p)_{n \in \mathbf{N}^*}$ suit asymptotiquement une **loi normale** de moyenne nulle (cf **normalité asymptotique**). Parmi les conditions nécessaires figure la condition $\alpha = 1$ (ie $\lambda_n = h \,.\, n^{-1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$).

Chaque terme $x_n$ de la suite $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ précédente est une **statistique affranchie** (ie ne nécessitant aucune hypothèse restrictive) pr aux **fr** tq F (. / x) (fonction de répartition de $\eta$ conditionnelle à $\xi = x$).