MÉTHODE DE LA FONCTION MUETTE (A5, C2, C4)
(25 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La **méthode de la fonction « muette »** est une méthode du **calcul des probabilités** fondée sur le **théorème de transfert des mesures**. Elle s'avère commode, dans certains cas, notamment lors d'un **changement de va**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ un **vecteur aléatoire** de **loi** P^ξ. On définit un nouveau vecteur aléatoire $\eta : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ en posant :

(1) $\eta = \varphi(\xi)$ ou $\eta = \varphi \circ \xi$,

expression dans laquelle $\varphi : \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}^K$ est une **application mesurable**.

Par définition, la **loi de probabilité** de η est la **mesure image** de P^ξ par φ, ie :

(2) $P^\eta = \varphi(P^\xi) = P^{\varphi \circ \xi}$.

(ii) Lorsque φ n'est pas un **homéomorphisme** de classe C^1 d'un **ouvert** U de $\mathbf{R}^K$ dans $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^K$, il est cependant possible de calculer la loi P^η.

En effet, la **méthode de la fonction muette** permet ce calcul en deux étapes :

(a) écriture de l'**espérance mathématique** d'une fonction mesurable arbitraire de η, dite **fonction muette**, $g : \varphi(\mathbf{R}^K) \mapsto \mathbf{R}^K$ (cf **application mesurable**) ie :

(3) $E\, g(\varphi(\xi)) = \int g(\varphi(x))\, dP^\xi(x)$;

(b) réécriture de (3) sous forme d'une **intégrale** tq :

(4) $E\, g(\eta) = E\, g \circ \eta = \int g(y)\, dQ(y)$.

(iii) Lorsque ces étapes sont réalisables, la solution du problème n'est autre que $P^\eta = Q$. En effet, g étant arbitraire, on peut toujours choisir $g = \mathbf{1}_B$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^K)$. Ce résultat est parfois appelé **théorème de la fonction muette**.