MÉTHODE DES CRIBLES (C5, H3)
(30 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **méthode des cribles** est une méthode d'**estimation** du type « **maximum de vraisemblance** » adaptée à un contexte non paramétrique.

En effet, dans le cas d'un modèle non paramétrique (eg lorsque Θ est de dimension infinie), la **méthode du mv** n'est pas applicable :

(a) soit parce que la **vraisemblance**, ou l'**estimateur** correspondant, ne sont pas bornés ;

(b) soit parce que cet **estimateur du mv** diverge.

La **méthode des cribles**, ou **méthode des tamis**, (U. GRENANDER) cherche à éviter ces inconvénients.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ un **modèle statistique** paramétré par un ensemble Θ (supposé être un **espace topologique**), $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'observation** (eg $\mathcal{X}$ est un **espace de BANACH** réel séparable muni de sa **tribu borélienne** $\mathcal{B}$) et $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **va** (eg un **échantillon** ou une **statistique**) dont une **loi de probabilité** potentielle est $P_\theta^X = X(P_\theta)$, avec $\theta \in \Theta$.

On appelle **crible**, ou **tamis**, sur Θ toute **famille** $(\Theta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de **parties compactes** de Θ tq :

(a) le couple $(\Lambda, \leq)$ est un **ensemble** ordonné (cf **relation d'ordre**) et la famille précédente est croissante, ie :

(1) $\lambda' < \lambda'' \Rightarrow \Theta_{\lambda'} \subset \Theta_{\lambda''}$;

(b) la réunion $\cup_{\lambda \in \Lambda} \Theta_\lambda$ est une **partie dense** de Θ ;

(c) $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ est une **famille de lois dominée** par une **mesure positive** μ définie sur $\mathcal{B}$ et la **fonction de vraisemblance** :

(2) $f(. , \theta) = dP_\theta^X / d\mu$, P_θ-p.s., $\forall \theta \in \Theta$,

admet, $\forall \lambda \in \Lambda$, un maximum (ou un supremum) sur Θ_λ , ie :

(3) $\sup_{\theta \in \Theta(\lambda)} f(x, \theta) < +\infty$, $\forall \lambda \in \Lambda$,

où $\Theta(\lambda)$ désigne, par commodité, Θ_λ .

L'**estimateur du maximum de vraisemblance** $\theta_\lambda\tilde{}$ de θ, ainsi contraint par Θ_λ , est appelé **estimateur par criblage local**, ou **estimateur par tamisage local**, de (la **vraie valeur** θ^* de) θ.

Par définition, il vérifie donc :

(4) $\quad f\,(X, \theta_\lambda\tilde{}) \;=\; \sup_{\theta \in \Theta(\lambda)} f\,(X, \theta), \qquad \mu$-p.p..

Autrement dit, $\theta_\lambda\tilde{}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ contraint par Θ_λ .

(ii) La **méthode des cribles**, ou **méthode des tamis**, doit résoudre les problèmes suivants :

(a) existence et unicité de $\theta_\lambda\tilde{}$ pour chaque $\lambda \in \Lambda$;

(b) propriétés de la famille $(\theta_\lambda\tilde{})_{\lambda \in \Lambda}$ (notamment, **convergence stochastique** asymptotique, **loi asymptotique**, vitesse de convergence), eg lorsqu'on suppose que Λ = **N** ;

(c) rapports entre la famille $(\theta_\lambda\tilde{})_{\lambda \in \Lambda}$ et l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ lorsque ce dernier est défini (cas paramétrique) ;

(d) **indépendance** éventuelle de la limite stochastique lim st.$_\lambda$ $\theta_\lambda\tilde{}$ de la famille $(\theta_\lambda\tilde{})_{\lambda \in \Lambda}$ ainsi définie pr à la famille $(\Theta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ considérée ;

(e) liaison entre λ et N (taille de l'échantillon X).